「平成 27 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

**1.** 次の各問に答えよ。

(1) 自然数 4200 の正の約数の個数を求めよ。ただし，1 と 4200 自身も約数とすること。

(2) 自然数 $n = m^r l^s$ $(m, l, r, s$ ： 自然数$)$ がある。この自然数 $n$ の正の約数の個数が $(2r+1)(4s+1)(r+3s+1)$ であるとき, $n$ はどんな数だと言えるか。

(3) 自然数 $n$ の正の約数は 45 個あり, それらの総和は 12493 になるという。
自然数 $n$ を求めよ。

**2.** 図 1 の長方形 ABCD は, 図 2 の 3 つの長方形をたてに並べたものである。
∠CAB の大きさを求めよ。 できればいろいろな解法を考えよ。

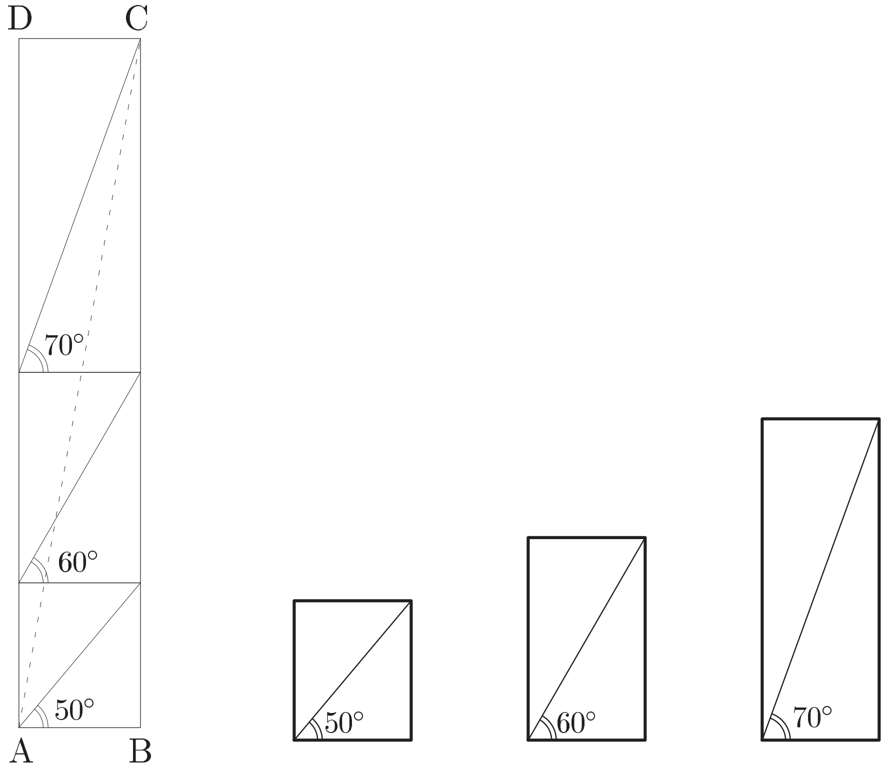


図 1　　図 2

**3.** 数列 $\{ a_n \}$ ($n$ は 0 以上の整数) が

$n = 2m$(偶数) のとき $a_{2m} = {}_{2m+1}C_0 + {}_{2m}C_1 + \cdots + {}_{m+1}C_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1-k}C_k$

$n = 2m+1$(奇数) のとき $a_{2m+1} = {}_{2m+2}C_0 + {}_{2m+1}C_1 + \cdots + {}_{m+1}C_{m+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m+1} {}_{2m+2-k}C_k$

で定められている。次の各問に答えよ。

(1) $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ を求めよ。

(2) 一般項 $a_n$ を求めよ。

**4.** 四面体 O-ABC において, 各辺の長さを

$$\mathrm{OA} = \mathrm{BC} = a, \quad \mathrm{OB} = \mathrm{CA} = b, \quad \mathrm{OC} = \mathrm{AB} = c$$

とする。 この四面体の体積を $V$ として, $V^2$ を $a, b, c$ を用いて因数分解した式で表せ。

**5.** 実数 $x$ を, $x = a + b$ ($a$ は整数, $b$ は $0 \leqq b < 1$ を満たす実数) と表すとき, $b$ を $x$ の小数部分という。実数 $x$ に対して, $b_1, b_2, b_3, \cdots$ の値を, 以下の手順に従って, 順次定める。

≪ 手順 ≫ $x$ の小数部分を $b_1$ とする。

$b_1 \neq 0$ ならば, $\dfrac{1}{b_1}$ の小数部分を $b_2$ とする。

$b_2 \neq 0$ ならば, $\dfrac{1}{b_2}$ の小数部分を $b_3$ とする。

以下, この操作を $b_n = 0$ ($n$ は自然数) とならない限り続ける。

(1) $x = \sqrt{7}$ のとき, $b_{2015}$ の値を求めよ。

(2) 分母にさらに分数が含まれるような階層構造の分数を「連分数」という。例えば, $\dfrac{11}{7}$ は, 上の手順を利用すると次のように 連分数で表すことができる。

$$\frac{11}{7} = 1 + \frac{4}{7} = 1 + \frac{1}{\dfrac{7}{4}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{3}{4}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3}}}$$

$x = \dfrac{37}{14}$ に対し，上の手順で定めた $b_1,\ b_2,\ \cdots$ において

$$b_n = 0$$

となったとする。このとき，$y = b_{n-1}$ とおき $x = \dfrac{37}{14}$ を $y$ を含む連分数で表せ。

(3) 不等式 $p < \sqrt{7} < q,\ \ q - p < \dfrac{1}{1400}$ をともに満たす有理数 $p,\ q$ の組 $(p, q)$ で, $p, q$ を既約分数で表したときの分母がいずれも 2 桁の自然数となるものを 1 組求めよ。