

平成 12 年度

卒業論文

「量子力学と古典力学の関係」と
「高次代数方程式と数値計算法」
および「データとデータ解析」について

指導教員

山本 哲也 助教授

電子・光システム工学科

学籍番号 1010326

浜小路 欣大

1. 目次

1. 目次	1
2. はじめに	2
3. 量子力学と古典力学の関係	4
3.1 目的	4
3.2 ド・ブロイ波	4
3.3 シュレーディンガー方程式	4
3.4 波束	7
3.5 波束の運動	7
3.6 期待値	8
3.7 グリーンの定理	9
3.8 エーレンフェストの定理	9
3.9 結論	13
3.10 まとめ	13
4. 高次代数方程式と数値計算法	14
4.1 目的	14
4.2 使用する方程式とその解	14
4.3 ニュートン法	15
4.3.1 ニュートン法の考え方	15
4.3.2 エラー対策	18
4.3.3 流れ図	19
4.3.4 ソース	20
4.3.5 計算結果	22
4.3.6 計算が可能な範囲	23
4.3.7 結論	24
4.3.8 まとめ	24

4.4	はさみうち法	25
4.4.1	はさみうち法の考え方	25
4.4.2	許容誤差	27
4.4.3	流れ図	28
4.4.4	ソース	29
4.4.5	計算結果	30
4.4.6	結論	33
4.4.7	まとめ	33
4.5	結論	34
4.6	まとめ	34
5.	データとデータ解析(線形近似とその外挿)	35
5.1	目的	35
5.2	コンビニエンスストアのシステム構築	36
5.3	技術導入による繁栄	38
5.4	優良企業の条件	40
5.5	結論	41
5.6	まとめ	41
6.	おわりに	41
7.	謝辞	42
8.	参考文献	43

2. はじめに

本論文は3つのテーマ「量子力学と古典力学の関係」、「高次代数方程式と数値計算法」、「データとデータ解析」で構成されている。

「量子力学と古典力学の関係」

量子力学を学習するなかで、数学が言葉であり、現象を説明する道具であるということを感じた。数式を使った現象の説明で、初めて感銘を受けたのが、エーレンフェストの定理である。このエーレンフェストの定理を中心に量子力学と古典力学のつながりについて説明する。

「高次代数方程式と数値計算法」

計算機を使った数値計算法について、3次方程式の解を求めるために、ニュートン法と、はさみうち法の2つを用いた。この2つの計算法の考え方、そして、プログラムによる計算を通して、正しい計算結果を出すためには、入力値と許容誤差の2つが重要であることを述べる。

「データとデータ解析」

プレゼンテーションセミナーを通して、工学とマネジメントの関わりについて様々な成功事例について考えてきた。その成功事例の1つで、私が注目したのがコンビニエンス業界である。

右上がり発展を遂げているコンビニエンス業界について、業界最大手のセブンイレブンジャパン株式会社の売上高を解析してみた。すると、異業種の優良企業にも共通した、ある法則が浮かび上がってきた。データを解析することで明らかになったその法則について論じる。

3. 量子力学と古典力学の関係

ある一定の力を受けている波束の重心の運動は、相当の誤差を許せば、古典力学に従う粒子の運動方程式 $F = ma$ で表すことができる。これをエーレンフェストの定理という。このエーレンフェストの定理によって、量子力学からみた古典力学のニュートン方程式が導き出せるのである。今回はこのエーレンフェストの定理を中心に、量子力学と古典力学の関係を説明する。

3.1 目的

エーレンフェストの定理を中心に、量子力学と古典力学との関係を説明する

3.2 ド・ブROI波

よく知られているように、光には、粒子と波の2つの性質、2重性がある。これと同じことが、物質を構成している粒子についても言えるのではないかと考えたのが、ド・ブROIである。この粒子の周りに存在する波のことをド・ブROI波と呼び、運動量 $p = mv$, エネルギー $\varepsilon = h\nu$ をもっている粒子は、波長を λ とすると、

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (3.1)$$

のド・ブROI波を伴っている。(ただし、振動数 ν と、プランク定数 $h = 6.621676 \times 10^{-34}$ を用いた) このド・ブROI波が、空間をどのように移動するのかを表したのが、シュレーディンガー方程式である。

3.3 シュレーディンガー方程式

量子力学において基本となる方程式が、シュレーディンガー方程式である。このシュレーディンガー方程式は、ド・ブROI波がどのようにして、空間を移動していくのかを示したものである。

波が空間を伝わるということは、ある大きさの量が空間を移動していることを意味する。その量は音波の場合、空気の密度であり、光波の場合は、電場と磁場とに相当する。ド・ブROI波は、ヒルベルト空間と呼ばれる無限次元空間を伝わっている。そのヒルベルト空間を伝わるド・ブROI波の量を

$$\psi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} = (x, y, z)$$

で表す。この $\psi(\mathbf{r}, t)$ を波動関数と呼ぶ。以上を踏まえてシュレーディンガー方程式を導いてゆく。

私たちが、日常見ている光は、様々な波長の光波で構成されているが、今回は、その波長が1つである場合を考える。本来、光波では波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は、ベクトル量なのであるが、説明のためにスカラー量であるとする。

ある波について、波長を1つに限定した場合、 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は、振動数 ν を使って、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{-2\pi i\nu t} \quad (3.2)$$

と書ける。一般に、位相速度 v で空間を伝わる波の方程式が、

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

で与えられるので、 $\varphi(\mathbf{r})$ を使って、

$$\nabla^2\varphi + \frac{4\pi^2\nu}{v^2}\varphi = 0$$

と書き直せる。さらに、

$$\frac{v}{\nu} = \lambda$$

を代入すると、

$$\nabla^2\varphi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\varphi = 0 \quad (3.3)$$

さらに、ド・ブロー波の波長 λ について(3.1)式を代入すると、

$$\nabla^2\varphi + \frac{4\pi^2 p^2}{h^2}\varphi = 0 \quad (3.4)$$

となる。

ところで、非相対理論的な場合には、エネルギー ε は、運動エネルギーと位置エネルギー $V(\mathbf{r})$ の和として

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

のように表される。これを用いると(3.4)式は

$$\nabla^2\varphi + \frac{2m}{\hbar^2}\{\varepsilon - V(\mathbf{r})\}\varphi = 0 \quad (3.5)$$

となる。ただし、 \hbar は

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

である。多くの場合、(3.5)式を

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \varphi(\mathbf{r}) = \varepsilon \varphi(\mathbf{r}) \quad (3.6)$$

と書く。この(3.6)式を、**時間を含まないシュレーディンガー方程式**という。

エネルギーに関するド・ブロイの式 $\varepsilon = h\nu$ を(3.2)式に入れると

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{\frac{-i\varepsilon t}{\hbar}}$$

と書けるから、これを t で微分してみれば

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \varepsilon \psi \quad (3.7)$$

となる。(3.6)式の右から $e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}$ をかけると

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \varphi(\mathbf{r}) e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}} = \varepsilon \varphi(\mathbf{r}) e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}$$

上式の右辺に(3.7)式を代入すると

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \psi(\mathbf{r}, t)$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (3.8)$$

と導ける。先ほど導いた(3.6)式では波動関数は $\varphi(\mathbf{r})$ と、ベクトル \mathbf{r} だけの関数であるのに対して、(3.8)式の波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は時間 t の成分を含んでいる。粒子の受けているポテンシャルが時間に依存しない $V(\mathbf{r})$ で書けるならば、(3.6)式でよいが、これが時間的に変化する $V(\mathbf{r}, t)$ である場合、波動関数が時間 t の成分を含んでいる必要がある。(3.8)式は t を含んでいるのでポテンシャルを $V(\mathbf{r}) \rightarrow V(\mathbf{r}, t)$ として

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (3.9)$$

と書く。この(3.9)式のことを、**時間を含むシュレーディンガー方程式**という。質量 m の粒子が、時間も空間的にも変化するポテンシャル $V(\mathbf{r}, t)$ を受けて運動するとき、波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ はこの方程式に従うのである。

これまでの内容で、ド・ブロー波とシュレーディンガー方程式について説明した。そこで、このド・ブロー波が、量子力学ではどのように扱われているのか説明する。

3.4 波束

量子力学では、ド・ブロー波は波束であることを前提として扱われる。波束は、幅も長さも狭い範囲内に限られた波のことを意味する。そして、波束には無限に多くの、波長が少しずつ異なる正弦波が重ね合わさっている。また、波長が異なると位相速度も異なってくるのが、 $v = \lambda\nu$ からいえるので、自由空間では波束は崩壊してしまう、しかし、原子に束縛されている定常状態の電子のように、ほぼ一定のポテンシャルを受けている粒子については、波束は崩壊しないことがわかっている。以下の説明は、この波束が崩壊しないことを前提としている。

3.5 波束の運動

波束が、位相速度 v を持つということは、波束は運動しているということである。このとき以下の自然界の基本法則が成り立つ。

ポテンシャル $V(\mathbf{r}, t)$ から導かれる力

$$F(\mathbf{r}, t) = -\text{grad}V(\mathbf{r}, t) \quad (3.10)$$

の場の中で運動する質量 m の粒子の振る舞いを表す波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は、一般には時間を含むシュレーディンガー方程式

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (3.11)$$

の解として与えられる。

そして、(3.11)式の左辺について

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\mathbf{r}, t) \quad (3.12)$$

とにおいて、これをハミルトニアンとよぶ。このハミルトニアンを使うと(3.11)式は

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.13)$$

と書き直せる。この式は後に説明するエーレンフェストの定理で用いる。

そのエーレンフェストの定理を導く上で重要なものに期待値がある。期待値について説明する。

3.6 期待値

波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ によって微小な空間 $d\mathbf{r}$ に粒子が存在する確率は $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}$ で求めることができる。確率であるから全ての事象の和は1になる。そこで、考えている全空間で積分すると

$$\iiint |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = 1 \quad (3.14)$$

となるように適当な定数を ψ に掛けたりすることを**規格化**といい。ふつう波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は、規格化して使う。

さて、話を期待値に戻すが、位置 \mathbf{r} に粒子が存在する期待値 $\bar{\mathbf{r}}$ は、確率 $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}$ を用いて

$$\bar{\mathbf{r}} = \iiint \mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}$$

で求めることができる。上式は $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)$ であることから

$$\bar{\mathbf{r}} = \iiint \psi^*(\mathbf{r}, t)\mathbf{r}\psi(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r} \quad (3.15)$$

と書き直すことができる。この(3.15)式をもとにエーレンフェストの定理は導けるのだが、その際に必要なグリーンの定理について触れておく。

3.7 グリーンの定理

グリーンの定理は、3次元空間で、閉曲面 S によって囲まれた領域 V での体積積分を S についての面積積分で表すもので、

$$\iiint (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dx dy dz = \iint_n (u\nabla v - v\nabla u) dS$$

で表される。このとき、 u および v はスカラー点関数で、右辺の $(u\nabla v - v\nabla u)_n$ は、

曲面 S に対して垂直なベクトルである。このグリーンの定理を用いてエーレンフェストの定理を導く。

3.8 エーレンフェストの定理

エーレンフェストの定理を §3.6 で導いた期待値の式をもとに導いてゆく。(3.15)式を x 軸方向のみに注目して書き直すと

$$\bar{x} = \iiint \psi^* x \psi d\mathbf{r} \quad (3.16)$$

となる。この式に含まれている波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は、時間の成分も含んでいるが、これを \mathbf{r} で定積分すれば、 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は時間 t の関数になり、 \bar{x} は t だけの関数ということがわかる。このことは、他の \mathbf{r} の成分 y, z についても同様である。そこで、(3.16)式を t で微分すると、期待値 \bar{x} の時間変化を知ることが出来る。実際に両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = \frac{d}{dt} \iiint \psi^* x \psi d\mathbf{r} \quad (3.17)$$

となり、時間 t とベクトル \mathbf{r} の成分 x, y, z は互いに独立であるから、 \mathbf{r} で積分する前に、 t で微分を行ってもよいので

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x} &= \iiint \frac{d}{dt} (\psi^* x \psi) d\mathbf{r} \\ &= \iiint \left(\frac{d\psi^*}{dt} x \psi + \psi^* x \frac{d\psi}{dt} \right) d\mathbf{r} \end{aligned}$$

ここで、(3.13)式より

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} H \psi, \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} H \psi^* \quad (3.18)$$

であるから、これを代入して

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = \frac{1}{i\hbar} \iiint \{ \psi^* x H \psi - (H \psi^*) x \psi \} d\mathbf{r}$$

さらに、(3.12)式より

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x} &= \frac{1}{i\hbar} \iiint \{ \psi^* x H \psi - (H \psi^*) x \psi \} d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \iiint \left[\psi^* x \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right\} \psi - \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right\} \psi^* \right] x \psi d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \iiint \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* x \nabla^2 \psi + \psi^* x V(\mathbf{r}, t) \psi + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 \psi^*) x \psi - V(\mathbf{r}, t) \psi^* x \psi \right] d\mathbf{r} \end{aligned}$$

ここで、ポテンシャル $V(\mathbf{r}, t)$ が含まれている項は

$$\psi^* x V \psi = V \psi^* x \psi$$

であるから消えてしまって

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} \bar{x} &= \frac{1}{i\hbar} \iiint \frac{\hbar^2}{2m} \{ (\nabla^2 \psi^*) x \psi - \psi^* x \nabla^2 \psi \} d\mathbf{r} \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \iiint \{ \psi^* x \nabla^2 \psi - (\nabla^2 \psi^*) x \psi \} d\mathbf{r} \end{aligned} \tag{3.19}$$

ところで、上式を展開するために

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x\psi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

を使う。しかし、このままでは代入できないので、変形すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x\psi) &= 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ + x \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} & \quad + x \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ + x \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} & \quad + x \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x\psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x\psi) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (x\psi) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi$$

$$\nabla^2 (x\psi) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + x (\nabla^2 \psi)$$

これを用いると

$$\begin{aligned}
x(\nabla^2\psi) &= \nabla^2(x\psi) - 2\frac{\partial\psi}{\partial x} \\
\nabla^2\psi &= \frac{1}{x}\left\{\nabla^2(x\psi) - 2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\} \\
\psi^*x\nabla^2\psi &= \psi^*\nabla^2(x\psi) - 2\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}
\end{aligned}$$

となるので、(3.19)式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{x} = \frac{i\hbar}{2m}\iiint\left\{\psi^*\nabla^2(x\psi) - (\nabla^2\psi^*)x\psi\right\}d\mathbf{r} + \frac{1}{m}\iiint\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)d\mathbf{r} \quad (3.20)$$

と書ける。この式の右辺第1項は、§3.7のグリーンの定理の式

$$\iiint(u\nabla^2v - v\nabla^2u)dxdydz = \iint_n(u\nabla v - v\nabla u) dS$$

に、 $u = \psi^*$, $v = x\psi$ を代入した形になっている。右辺の面積分の部分について、今考えている波束が、幅も長さも制限された波であることを思い出せば、波束の重心から遠く離れている部分の値は0と近似してよい。したがって、(3.20)式の第1項は消えてしまい、

$$m\frac{d}{dt}\bar{x} = \iiint\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi d\mathbf{r}$$

となる。これをさらに t で微分すると

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{x} = \iiint\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\mathbf{r} + \iiint\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\mathbf{r}$$

これに、先ほどと同様に、(3.18)式を用いて

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{x} = \iiint\left\{(H\psi^*)\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial}{\partial x}(H\psi)\right\}d\mathbf{r}$$

また、(3.12)式より

$$\begin{aligned}
m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{x} &= \iiint\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} + V(\mathbf{r})\right)\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} + V(\mathbf{r})\right)\psi\right]\right]d\mathbf{r} \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\iiint\left\{(\nabla^2\psi^*)\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi)\right\}d\mathbf{r} + \iiint\left\{V(\mathbf{r})\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial}{\partial x}(V(\mathbf{r})\psi)\right\}d\mathbf{r}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r})\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial}{\partial x}(V(\mathbf{r})\psi) &= V(\mathbf{r})\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \psi - \psi^* V \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
&= -\psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \psi \\
-\psi^* \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) &= -\psi^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \\
&= -\psi^* \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\
&= -\psi^* \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}
\end{aligned}$$

であるから

$$m \frac{d^2}{dt^2} \bar{x} = -\frac{\hbar^2}{2m} \iiint \left\{ (\nabla^2 \psi^*) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi^* \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} d\mathbf{r} - \iiint \psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \psi d\mathbf{r}$$

グリーンの定理より、右辺第1項は消えるので

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2}{dt^2} \bar{x} &= - \iiint \psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \psi d\mathbf{r} \\
&= \iiint \psi^* \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) \psi d\mathbf{r}
\end{aligned}$$

となる。結果的に

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{x} = \iiint \psi^* \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) \psi d\mathbf{r} \quad (3.21)$$

が導き出せる。この(3.21)式の右辺は、 $-\frac{\partial V}{\partial x}$ の期待値を表している。巨視的な視点で

考えて、ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が一定とみなせる場合、 $-\frac{\partial V}{\partial x}$ は粒子の受ける力 F の x 成分を

表しており、(3.21)式は

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{x} = F_x(x, y, z) \quad (3.22)$$

となる。上式の $F_x(x, y, z)$ は、想定している空間全体について考えているが、グリーンの定理を使用する際に述べたように、波束の重心から離れている部分について、波束は存在しないので、考える必要はない。つまり、波束の重心付近が問題であって、その他の空間は考えていないのである。したがって、 $F_x(x, y, z)$ を、波束の重心での値 $F_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ に書き換えることが出来る。このことから、(3.22)式は

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{x} = F_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (3.23)$$

となる。これは \bar{y}, \bar{z} についてもいえるので、まとめて $\bar{\mathbf{r}}$ と書けば

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{r}})$$

となる。

これは古典力学の運動方程式 $ma = F$ にほかならない。ここで量子力学と古典力学はつながっているのである。これをエーレンフェストの定理という。

3.9 結論

量子力学では粒子を、幅と長さを狭い範囲内に限られた波である波束を伴っているものと扱っている。その波束が崩壊しないポテンシャルが巨視的な視点から考えて、ほぼ一定で、粒子の位置に相当の誤差を許した場合、エーレンフェストの定理によって古典力学に従う粒子として扱うことができる。このことから量子力学と古典力学はつながっていることがいえる。

3.10 まとめ

- 量子力学で扱う粒子はド・ブローイ波をともなっている
- ド・ブローイ波は波束として扱われ、波束は波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ で表される
- 時間を含まないシュレーディンガー方程式：

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \varphi(\mathbf{r}) = \varepsilon \varphi(\mathbf{r})$$

- 時間を含むシュレーディンガー方程式：

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t)$$

- 微小な空間 $d\mathbf{r}$ に粒子が存在する確率は $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}$ で求められる
- 粒子が位置 \mathbf{r} に存在する期待値 $\bar{\mathbf{r}}$ は、 $\bar{\mathbf{r}} = \iiint \mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}$ で求められる
- 量子力学と古典力学との関係はエーレンフェストの定理で説明できる

4. 高次代数方程式と数値計算法

この章では、高次代数方程式として3次方程式を扱い、ニュートン法と、はさみうち法の2つの数値計算法によって3次方程式の解を求めた。得られた結果を解析することで、それぞれの計算法の使い方について検討する。

4.1 目的

ニュートン法と、はさみうち法の使い方を理解する

4.2 使用する方程式とその解

今回使用する関数 $f(x)$ は(4.1), (4.2)式の2つである。以下ではその解を記した。

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(x-2) - x + 2 \\ &= (x-2)(x-1)^2 = 0 \\ \therefore x &= -1, 1, 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 2 \quad (4.2)$$

Mathematica 3.0 を利用した $f(x) = 0$ での近似解は

$$\begin{aligned} x &= -0.860805853111703278, \\ &0.745898311634947575, \\ &3.11490754147675552 \end{aligned}$$

である。

以上の式を用いニュートン法について説明する。

4.3 ニュートン法

ニュートン法は1つの入力値を必要とする計算法で、 $f(x)=0$ の近似解がわかっているときに使用される。まず、その考え方から説明する。

4.3.1 ニュートン法の考え方

ニュートン法は1つの入力値と、その入力値における $f(x)$ の近似解を、 $f'(x)$ を利用して求め、その近似解を反復修正することで、真の解を求める方法である。そこで、関数 $f(x)$ は以下の条件を満たさなければならない。

- ・ $f(x)$ は連続関数である
- ・ $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が求められる
- ・ 導関数 $f'(x) \neq 0$ である

以下では、 $f(x)$ が以上の3つの条件を満たすものとする。

ニュートン法では近似解を求める際に、入力値における接線を利用する。以下、入力値を a_0 、そのときの $f(x)$ 上の点を $A(a_0, f(a_0))$ とする。点 A における接線の方程式は

$$y - f(a_0) = f'(a_0)(x - a_0) \quad (4.3)$$

によって求めることができる。この接線と x 軸との交点が $f(x)=0$ の近似解である。この近似解を a_1 とおくと、 a_1 は(4.3)式に $x = a_1, y = 0$ を代入した

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$$

によって求めることができる。

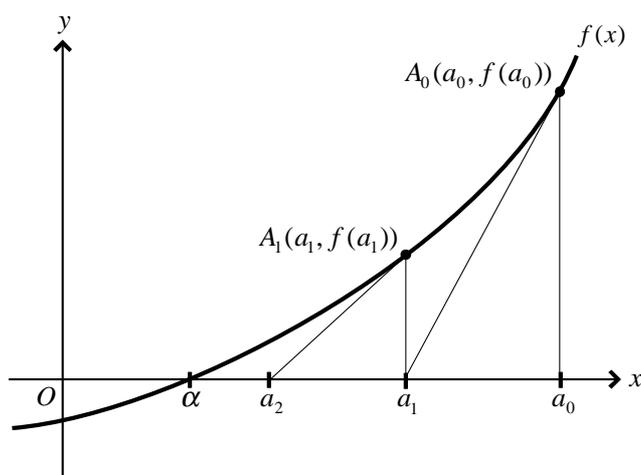


図 4.1 : 近似解が真の解 α に収束していく様子

さて、 a_1 において点 a_0 と同様の操作を繰り返し、そのときの近似解を a_2 とすると

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

となる。

図 4.1 から読み取れるように、近似解を求めていく度に、明らかに真の解 α に近づいている。これを n 回繰り返したときの近似解 a_{n+1} は

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

であり、このときの状態を描いたのが、図 4.2 である。

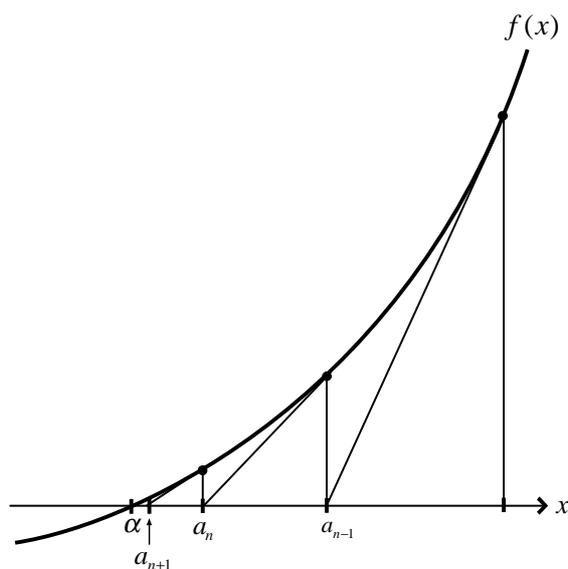


図 4.2 : 近似解を n 回求めた状態

図 4.2 から、計算を重ねる度に真の解に近づいていることがわかる。さらに近似解の間隔も狭まっていることに気づくだろう、つまり $|a_{n-1} - a_n| > |a_n - a_{n+1}|$ が成り立っているのである。

このことを利用して許容誤差 ε を設定する。図 4.3 のように、近似解の間隔 $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ を満たすとき、近似解 a_{n+1} を収束値として出力させるのである。

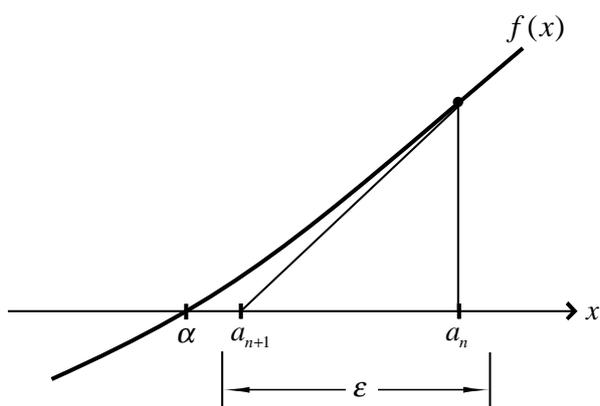


図 4.3: 許容誤差 によって解とみなされる場合

今回使用したプログラムでは $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-7}$ に設定しており、 $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ を満たすまで近似解の反復修正を繰り返すのである。

基本的には以上の考え方をを用いるが、このままでは入力値によってはプログラムがループしてしまう。次にその対策を説明する。

4.3.2 エラー対策

先ほどと同様に a が入力され、点 A における接線によって近似解 b が求められる。その様子を示したのが図 4.4(a)である。その近似解 b の x 軸からの垂線と、 $f(x)$ との交点が点 B で、図 4.4(b)にあるように、点 B における接線から求めた近似解が q である。

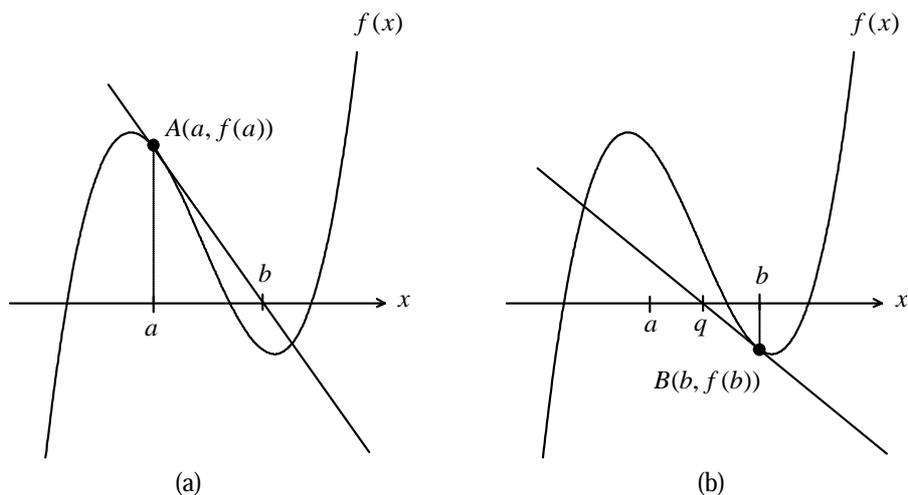


図 4.4： 近似解 q が求められる過程

上図の場合、入力値 a と、近似解 q は一致していない、しかし、これが一致した場合、つまり、図 4.5 のような場合、プログラムがループしてしまうのは明らかであろう。

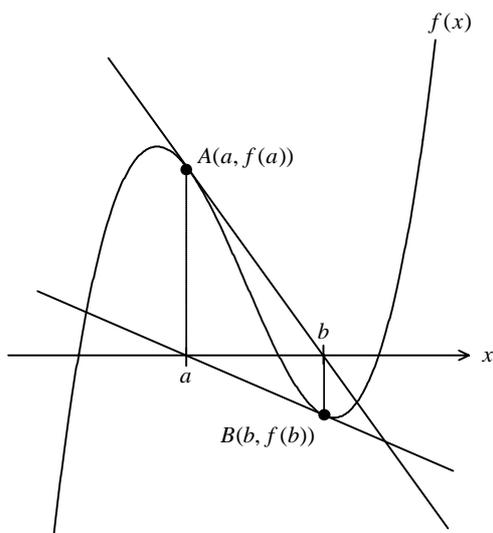
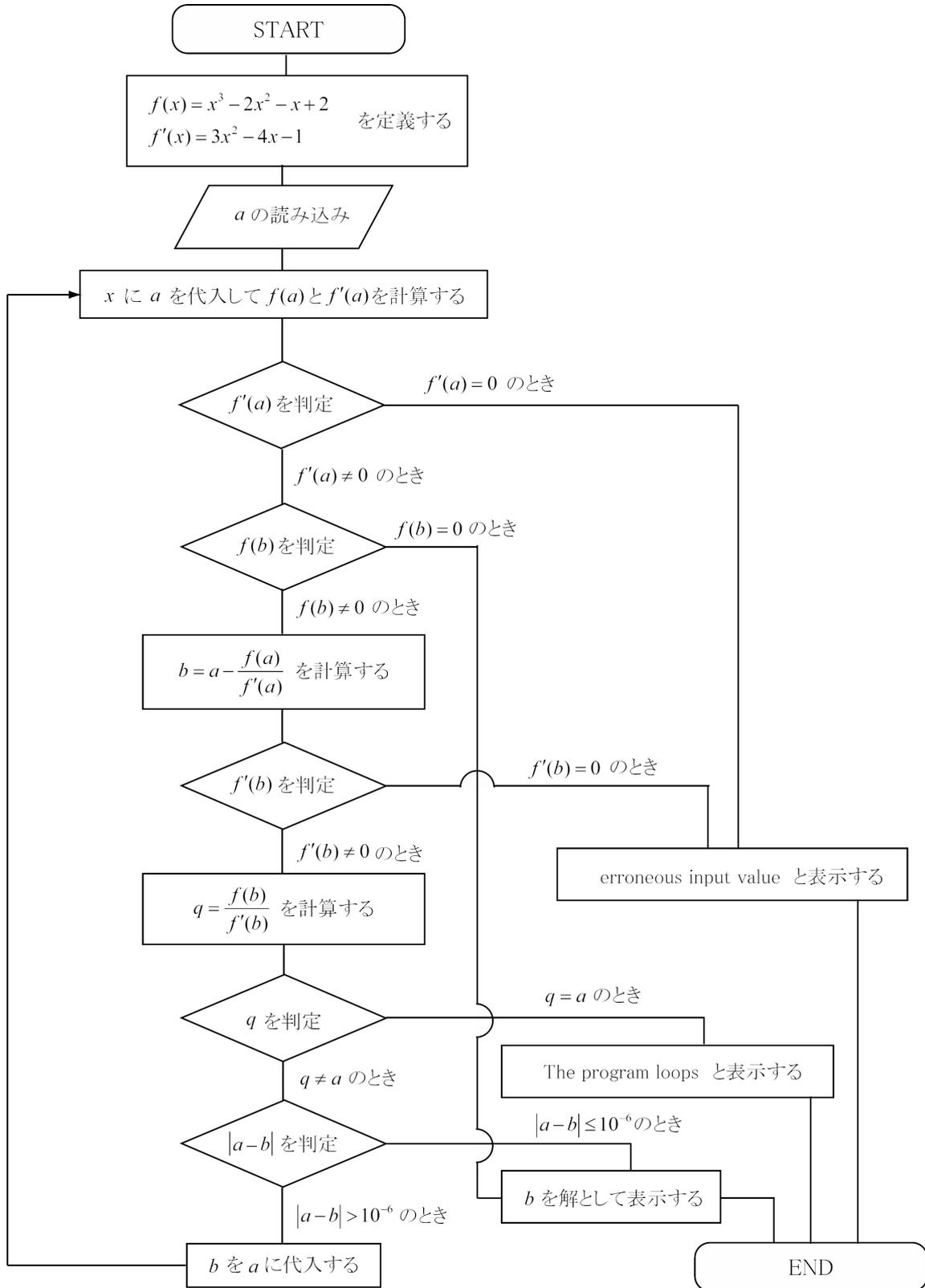


図 4.5： プログラムがループしてしまう場合

以上のことを考慮して、FORTRAN でプログラミングを行った。その流れ図とソースを示す。

4.3.3 流れ図



4.3.4 ソース

```
C      newton.f
      F(X)=X**3-2.0*X**2-X+2.0
      D(X)=3.0*X**2.0-4.0*X-1.0
      double precision a,b
      character *21 E1,E2
      E1='erroneous input value'
      E2='The program loops.'
      read (*,100) a
100    format (E13.6)
10     Fa=F(a)
      if (Fa.NE.0) then
      else
          write (*,200) a
          goto 40
      endif
      Da=D(a)
      if (Da.NE.0) then
      else
          write (*,*) E1
          goto 40
      endif
      b=a-Fa/Da
      Fb=F(b)
      if (Fb.NE.0) then
      else
          write (*,200) b
          goto 40
      endif
      Db=D(b)
      if (Db.NE.0) then
      else
          write (*,*) E1
          goto 40
      endif
      endif
```

```
q=b-Fb/Db
if (a.NE.q) then
else
    write (*,*) E2
    goto 40
endif
if (ABS(a-b)-1.0E-6)30,30,20
20 a=b
go to 10
30 write (*,200) b
200 format (1H ,2HX=,E13.6)
40 stop
end
```

4.3.5 計算結果

§4.4.4で示したソースをもとに、実際に入力値 $a = -2.0 \sim 2.0$ の範囲で解を求めてみた。計算したのは14ページ(4.1)式で、許容誤差 $\varepsilon = 10^{-6}$ 、その解は $x = -1, 1, 2$ である。下にその結果を示す。

入力値	出力	入力値	出力
-2.0	-1.0	0.1	2.0
-1.9	-1.0	0.2	1.0
-1.8	-1.0	0.3	1.0
-1.7	-1.0	0.4	1.0
-1.6	-1.0	0.5	1.0
-1.5	-1.0	0.6	1.0
-1.4	-1.0	0.7	1.0
-1.3	-1.0	0.8	1.0
-1.2	-1.0	0.9	1.0
-1.1	-1.0	1.0	1.0
-1.0	-1.0	1.1	1.0
-0.9	-1.0	1.2	1.0
-0.8	-1.0	1.3	1.0
-0.7	-1.0	1.4	1.0
-0.6	-1.0	1.5	-1.0
-0.5	-1.0	1.6	2.0
-0.4	-1.0	1.7	2.0
-0.3	-1.0	1.8	2.0
-0.2	2.0	1.9	2.0
-0.1	2.0	2.0	2.0
0.0	2.0		

表 4.1: 入力値 $a = -2.0 \sim 2.0$ での計算結果

表 4.1 から、 $-1, 1, 2$ 以外の誤った解は出力されていないことが読み取れる。そこで、計算が可能な範囲について調べてみた。

4.3.6 計算が可能な範囲

計算が可能な範囲を調べるために、以下の条件

- ・ 入力値 $a = -10.0 \sim -2.0$ 、増分 -1.0
- ・ 入力値 $a = 2.0 \sim 10.0$ 、増分 1.0

で計算した。結果は $a = -10.0 \sim -2.0$ では -1.0 、 $a = 2.0 \sim 10.0$ の区間では 2.0 であった。そこで、以下のような条件で計算した。そこで、増分を 1 桁にして計算した。結果を以下に示す。

入力値	出力		入力値	出力
-1.00E+01	-1.0		1.00E+01	2.0
-1.00E+02	-1.0		1.00E+02	2.0
-1.00E+03	-1.0		1.00E+03	2.0
-1.00E+04	-1.0		1.00E+04	2.0
-1.00E+05	-1.0		1.00E+05	2.0
-1.00E+06	-1.0		1.00E+06	2.0
-1.00E+07	-1.0		1.00E+07	2.0
-1.00E+08	-1.0		1.00E+08	2.0
-1.00E+09	-1.0		1.00E+09	2.0
-1.00E+10	-1.0		1.00E+10	2.0
-1.00E+11	-1.0		1.00E+11	2.0
-1.00E+12	-1.0		1.00E+12	2.0
-1.00E+13	---		1.00E+13	---

表 4.2: 増分1桁での計算結果

表 4.2 から読み取れるのは、入力値が $\pm 1.0E+13$ のところで出力されないことである。この点に関して、当初は入力値の読み込みフォーマット $E13.6$ による制約が原因だと考えていたが、 $D18.6$ のように桁数を 18 に変えても結果は同じであった。

以上のことから、ニュートン法は、近似解がある程度わかっている場合に使用される計算法にも関わらず、計算結果が出力される範囲が、かなり広いことがわかった。

4.3.7 結論

ニュートン法は、 $f(x)=0$ の近似解がある程度わかっている際に使用される方法である。しかし、3次方程式を計算してみると、計算が可能な入力値の範囲は、かなり広いことがわかった。

4.3.8 まとめ

ニュートン法について以下にまとめる。

- ・ 近似解がある程度わかっている際に使用される
- ・ 対象となる関数 $f(x)$ は連続関数でなければならない
- ・ 対象となる関数 $f(x)$ について、その導関数 $f'(x)$ が求められなければならない
- ・ 入力値によっては、ループしてしまう
- ・ 許容誤差によって精度を変えることが出来る
- ・ 3次方程式について、計算が可能な入力値の範囲はかなり広い

4.4 はさみうち法

はさみうち法(Regula-Falsi Method) は、求めたい真の解が2つの入力値 a と b との間に存在することがわかっている場合に用いる方法である。そして、ニュートン法と同様に、対象となる関数 $f(x)$ が連続関数であることが条件となる。関数 $f(x)$ が、この条件を満たすことを前提に、はさみうち法について、その考え方から説明する。

4.4.1 はさみうち法の考え方

はさみうち法において、入力値 a, b における関数 $f(x)$ の値 $f(a), f(b)$ の積は非常に重要である。図 4.6(i)は、入力値 a, b の間に解が存在しない場合、そして、図 4.6(ii)は解が存在する場合を示している。図 4.6(ii)に示すように $f(x)=0$ の解が、入力値 a と b の間に存在するということは、 $f(a) \cdot f(b) < 0$ であることを意味する。実際の計算では、有効な入力値であるか否かの判定を行うために最初に計算する。

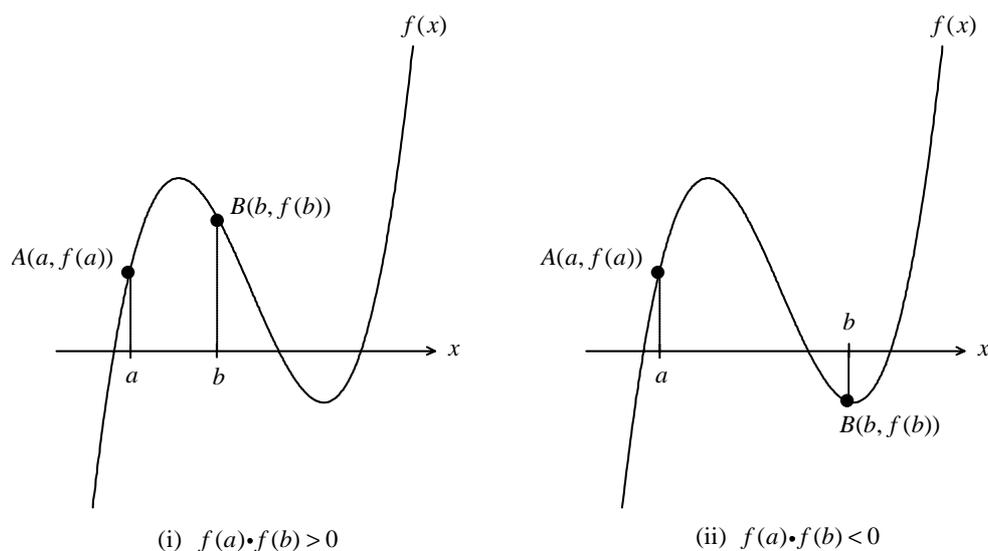


図 4.6 : 解の有無と $f(a) \cdot f(b)$ の符号

次に、図 4.6 の2点 A, B を結んだ線分 AB と x 軸との交点から近似解 c を計算する。 c は

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

で与えられる。 c を用いた計算の様子を描いたのが図 4.7 および、図 4.8 である。まず、入力値 a と近似解 c との間に真の解がある場合について、図 4.7 を使って説明する。

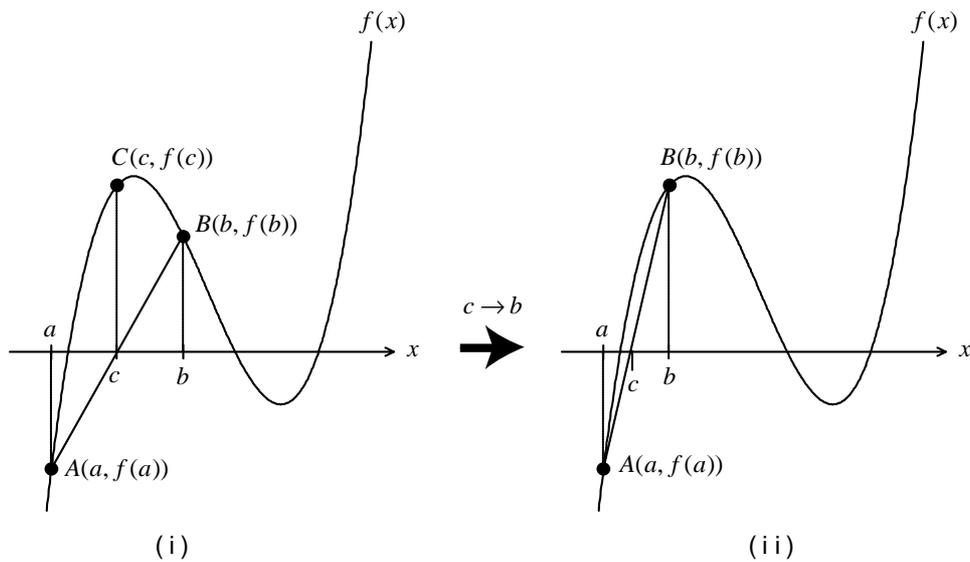


図 4.7: 入力値 a と近似解 c の間に解がある場合

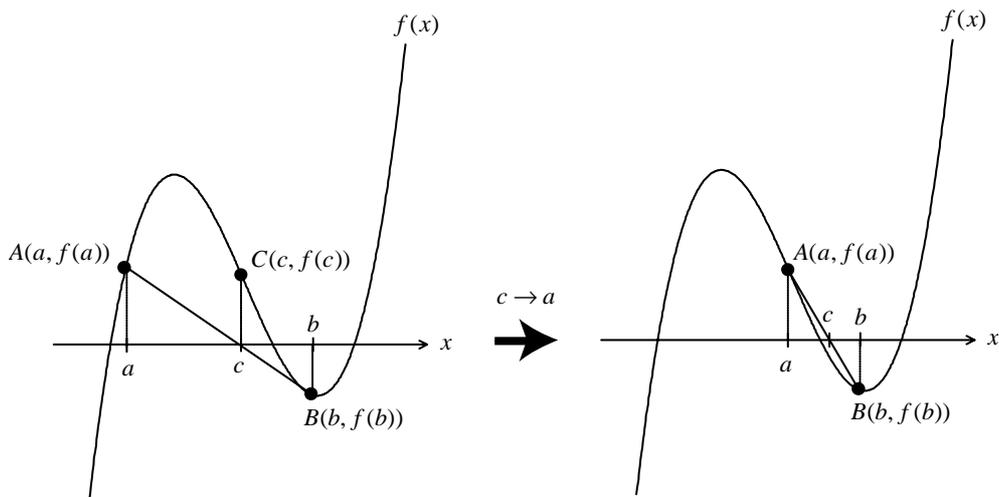


図 4.8: 入力値 b と近似解 c の間に解がある場合

図 4.7(i)は入力値 a と近似解 c との間に真の解が存在する場合である。このときの点 A と点 C 、および点 B と点 C の y 座標について、 $f(a) \cdot f(c) < 0$ 、 $f(b) \cdot f(c) > 0$ が成り立っていることが解る。 $f(b) \cdot f(c) > 0$ ということは、 b と c の間に解はないと判断してよい。そこで、近似解 c を入力値 b に代入して、再び近似解 c を求めたのが図 4.2(ii)である。

この場合とは逆に入力値 b と近似解 c との間に真の解がある場合については、近似解 c を入力値 a に代入すればよいことが図 4.8 から読み取れる。これを反復修正することで真の解に近づけていくわけだが、その判定にはニュートン法と同様に許容誤差 ε を用いる。

4.4.2 許容誤差

先程述べたように、はさみうち法において許容誤差 ε は非常に重要な値である。§4.4 のニュートン法では許容誤差は x 軸方向に対して設定していたが、はさみうち法では、これを y 軸方向に設定する。図 4.9 の網掛け部分がその適用範囲である。

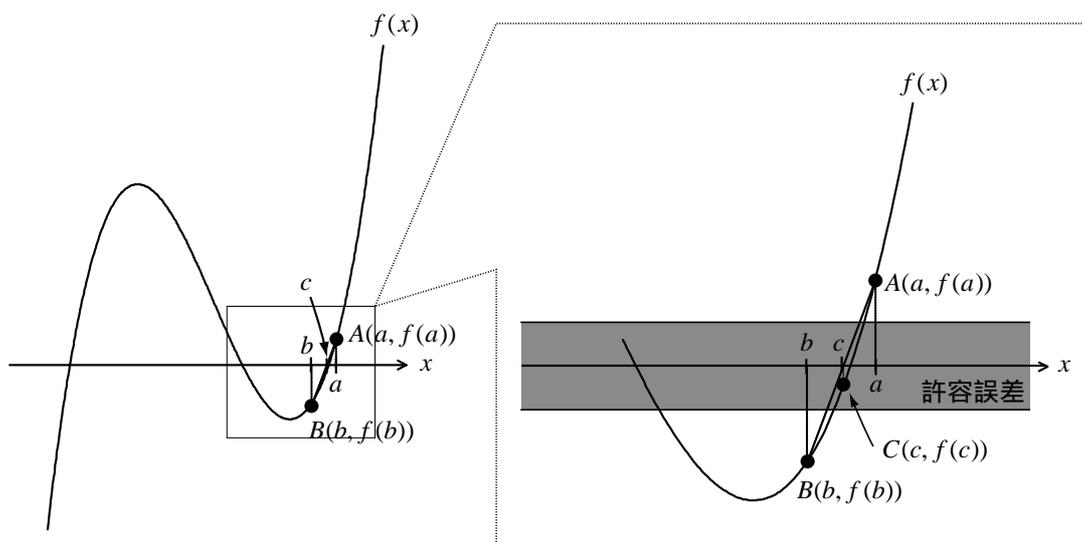
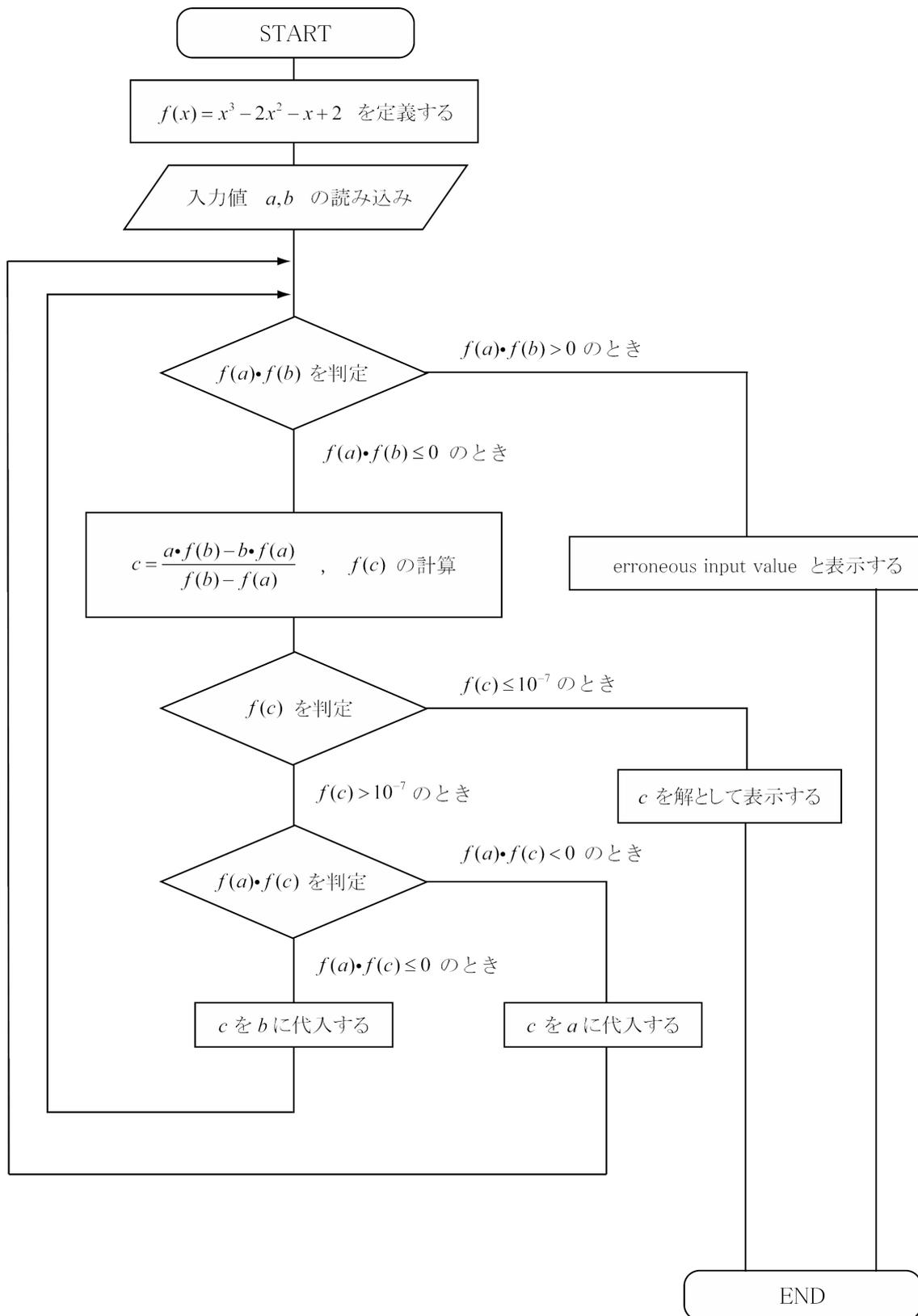


図 4.9 : はさみうち法における許容誤差

点 c の y 成分の絶対値 $|f(c)|$ が、許容誤差 ε に対して $|f(c)| < \varepsilon$ であるとき、近似解 c を解として出力するのである。以上を踏まえて書いたプログラムの流れ図とソースを以下に示す。

4.4.3 流れ図



4.4.4 ソース

```
C      falsi.f (Regular-Falsi method)
      F(X)=X**3-2.0*X**2-X+2
      double precision A,B,M
      character *21 E
      read (5,100) A,B
      E='erroneous input value'
100    format (F6.2)
      FA=F(A)
      FB=F(B)
      M=FA*FB
      if(M.LE.0) then
10      C=(A*FB-B*FA)/(FB-FA)
      FC=F(C)
      if (ABS(FC)-1.0E-07) 50,50,20
20      if (FA*FC) 30,40,40
30      B=C
      FB=FC
      go to 10
40      A=C
      FA=FC
      go to 10
50      write(*,200) C
200    format (1H ,2HX=,E13.6)
      else
      write (*,*) E
      endif
      end
```

4.4.5 計算結果

§4.5.4 で示したソースをもとに、 a を 1.25 に固定し、 b を $b=1.6 \sim 6.0$ に増分 0.1、許容誤差 $\varepsilon = 10^{-7}$ で計算した。結果を表 4.4 に示す。ただし、Error は、 $f(a) \cdot f(b) > 0$ であるためにエラーメッセージが表示される場合、Non は計算結果が全く出力されない場合を示す。

b	出力	b	出力	b	出力
1.6	Error	3.1	Non	4.6	Non
1.7	Error	3.2	Non	4.7	Non
1.8	Error	3.3	Non	4.8	Non
1.9	Error	3.4	Non	4.9	Non
2.0	2.0	3.5	2.0	5.0	Non
2.1	2.0	3.6	Non	5.1	Non
2.2	2.0	3.7	2.0	5.2	Non
2.3	2.0	3.8	Non	5.3	Non
2.4	2.0	3.9	Non	5.4	Non
2.5	2.0	4.0	2.0	5.5	Non
2.6	2.0	4.1	Non	5.6	Non
2.7	Non	4.2	Non	5.7	Non
2.8	Non	4.3	Non	5.8	Non
2.9	2.0	4.4	Non	5.9	Non
3.0	Non	4.5	Non	6.0	Non

表 4.4 : 許容誤差 $= 10^{-7}$ 、入力値 $a=1.25, b=1.6 \sim 6.0$ における計算結果

使用した方程式 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ の解が $x = -1, 1, 2$ であることから、入力値 $b = 2.0 \sim 2.6, 2.9, 3.5, 3.7, 4.0$ で正しい解が求められていることが確認できる。この解が求められている入力値を視覚的に把握するために書いたのが図 4.10 である。

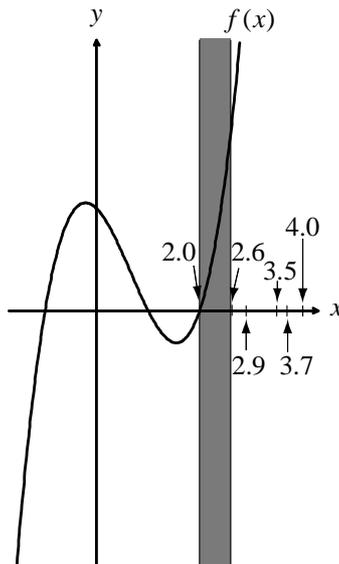


図 4.10 : 入力値 $a=1.25, b=1.6 \sim 6.0$ における計算結果

上図からもわかるように、解が求められる入力値 2.9, 3.5, 3.7, 4.0 の間に法則性があるとは思えない。そこで、これらの入力値での数値の動きを把握するためにプログラム `fxcal` (添付資料 P.44) を使って解析した。すると、これらの入力値では $f(c)$ が 0 に収束していることから、解が求められていることがわかった。それ以外の結果が出力されない入力値についても 同様に調べてみると、 $|f(c)| > \varepsilon$ の値でループしていることがわかる。

(添付資料参照 P.45)

したがって、結果が出力されない入力値について近似解を出力させるためには許容誤差 ε を大きくとればよいことが解る。実際に許容誤差を $10^{-7} \rightarrow 10^{-6}$ にして計算してみた結果が表 4.5 である。

b	出力	b	出力	b	出力	b	出力
1.6	Error	3.1	2.0	4.6	Non	6.5	Non
1.7	Error	3.2	2.0	4.7	Non	6.6	Non
1.8	Error	3.3	2.0	4.8	Non	6.7	Non
1.9	Error	3.4	2.0	4.9	Non	6.8	Non
2.0	2.0	3.5	2.0	5.0	2.0	6.9	Non
2.1	2.0	3.6	2.0	5.1	2.0	7.0	Non
2.2	2.0	3.7	2.0	5.2	Non		
2.3	2.0	3.8	2.0	5.3	2.0		
2.4	2.0	3.9	2.0	5.4	Non		
2.5	2.0	4.0	2.0	5.5	2.0		
2.6	2.0	4.1	Non	5.6	Non		
2.7	2.0	4.2	Non	5.7	2.0		
2.8	2.0	4.3	Non	5.8	Non		
2.9	2.0	4.4	Non	5.9	2.0		
3.0	2.0	4.5	Non	6.0	2.0		

表 4.5 : 許容誤差 $= 10^{-6}$ 、入力値 $a=1.25, b=1.6 \sim 7.0$ における計算結果

表 4.5 から、連続して解が出力される入力値の範囲が、 $b = 2.0 \sim 2.6$ から $b = 2.0 \sim 4.0$ に広がっていることがわかる。予想通りの結果となった。そこで、はさみうち法の使い方として、以下のように考えた。

はさみうち法で解が出力されない場合、許容誤差を広げて計算し、得られた結果をもとに、2つの入力値の幅を狭め、許容誤差を縮小して計算することが有効なのではないか

上記のことを確かめるために、下記の条件で 14 ページ(4.2)式を計算した。

条件

- 入力値を $a = -5.0, b = 8.0$ 、許容誤差 $\varepsilon = 10^{-5}$ で計算する
- 得られた結果を中心に 2つの入力値で幅 1.0 で挟み
許容誤差 $\varepsilon = 10^{-7}$ で計算する

結果は以下の通りである。

結果

- 入力値を $a = -5.0, b = 8.0$ 、許容誤差 $\varepsilon = 10^{-5}$ で計算する
出力結果: $x = -0.860804E + 00$
- 入力値を $a = -1.360804, b = -0.360804$ 、許容誤差 $\varepsilon = 10^{-7}$ で計算する
出力結果: $x = -0.860806E + 00$

これは、14 ページ(4.2)式の Mathematica 3.0 を利用した $f(x) = 0$ での近似解

$$x = -0.860805853111703278$$

と一致していることがわかる。したがって、はさみうち法の使い方について以下のような結論に達した。

4.4.6 結論

三次方程式において、はさみうち法で解が出力されない場合、許容誤差を大きくとり計算し、得られた結果をもとに、2つの入力値の幅を狭め、許容誤差を小さくして計算するという使い方が有効である。

4.4.7 まとめ

はさみうち法について、以下、まとめる。

- 近似解が、ある範囲に存在するとわかっている場合に使用される
- 対象となる関数 $f(x)$ は連続関数でなければならない
- 許容誤差によっては解が出力される範囲が変化する
- 入力値の幅と許容誤差を大きくとることで解の存在範囲を特定し、その範囲を許容誤差を小さくして計算することが有効である

4.5 結論

ニュートン法は、計算結果が出力される入力値の範囲が、かなり広いことがわかった。また、はさみうち法では、解が出力されない入力値については、許容誤差を広げて再び計算し、得られた結果から入力値で挟む幅を狭め、許容誤差を縮小して計算するという使い方が有効である

4.6 まとめ

今回使用した2つの数値計算法で近似解を求めるとき、重要となるのは入力値と許容誤差であった。入力値が真の解から余りにも離れていれば正しい出力は得られないし、許容誤差が大きければ、真の解から離れている値であるにも関わらず、正しい解として出力してしまう。他にも多くの数値計算法があるが、それぞれに正しい解を求める方法が存在すると思われる。自分のプログラムおよび入力値が、そういった方法に沿っているのか、確認するように心掛けていきたい。

5. データとデータ解析(線形近似とその外挿)

現在の日本の経済状態において、右肩上がり成長をし続けている企業は少ない。そのなかでも約30年という一世代の間に急成長を遂げたのがコンビニエンス業界である。そのコンビニエンス業界の最大手とされるセブンイレブンジャパン株式会社¹の売上高を解析し、その発展要因が技術導入であったことを中心に論じる。

5.1 目的

コンビニエンス業界最大手のセブンイレブンジャパン株式会社の売上高を解析し、その発展と技術導入との関わりを浮き彫りにする

5.2 線形近似について

今回の論文では、データ解析の手段として線形近似を用いた。線形近似は、ある区間で
の状態が直線に近似できる場合(図5.1)に用いられる方法で、その直線から予想値が計算
できる。(図5.2)

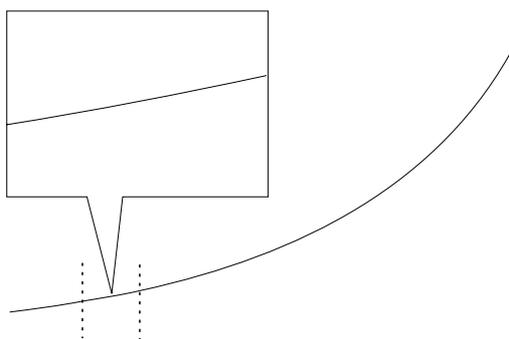


図 5.1 : 線形近似が可能な場合

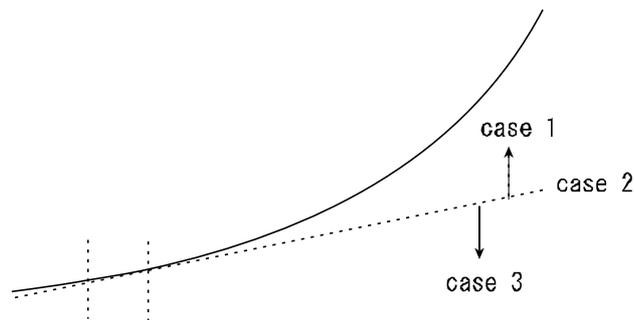


図 5.2 : 近似直線による場合分け

図 5.2 において、予想値と実際のデータが一致する case2 の場合、企業においては線形近似を行った時期における活動の計画どおりの進行を意味する。しかし、そのような場合は稀であり、多くの場合、実際のデータが予想値を上回る case1 及び、予想値を下回る case3 の状態になる。case1 の状態は企業においては最上の状態である。なぜならば、近似を行った時期における活動が予想以上の成功を収めたことを示しているからである。実際の数値が、予想値を下回る case3 は、近似をとった時期における活動の失敗を意味する。

ここで重要なのは、成功している事例について分析を行うことである。特に case1 を分析することによって、成功するための思考過程と戦略を得ることができるからである。その成功事例の 1 つであるコンビニエンス業界について、まず、その特徴について説明していく。

5.3 コンビニエンスストアのシステム構築^{(2),(3),(4),(5)}

コンビニエンス業界の最大の特徴はその物流システムにある。「集中出店方式」と呼ばれる方法で、一定地域を圧倒的に支配するように店舗を集中することで、物流コストの削減をはかった。また、「共同配送センター」を作り、問屋やメーカーなど供給側の商品を集中的に 1 箇所に集めることで、各地域内のチェーン店にそれぞれ配送していく無駄の無いシステムを作り上げた。これらの高度に管理された物流システムを可能にしているのが、定期的な情報システムの再構築である。セブンイレブンジャパンでは現在までに 5 回の大きな技術導入を行い、その技術導入を行うことで現在までの発展を遂げてきた。以下にその概要を記す。

第一次店舗システム（1978～1982）

まず、第一次店舗システムではオンライン端末、ターミナルセブンが導入された。導入前は電話での注文や、ミシン目が入っているカタログから、注文したい商品の部分を切り離し、それをまとめて短冊状にした注文伝票を作成するといったシステムをとっていた。全ての作業を人の手で行っていたのでミスが発生していた。それが、オンライン端末の導入によって一部を機械で行うことで、ミスを減少させるのと同時に、商品の発注と在庫管理を同時に行えるようにした。

第2次総合店舗情報システム（1982～1985）

POS（Point Of Sales）レジスターが日本で初めて導入され、それまでは在庫管理のみであったが、情報の蓄積と商品管理を同時に行えるようになった。また、EOB（Electronic Order Book）の導入によって、それまで発注台帳と呼ばれる冊子を使って注文していたのが、商品情報を記憶させたフロッピーディスクである EOB に替わり、商品のデータ確認と発注作業を端末で行うことを可能にした。

第3次総合店舗情報システム（1985～1990）

グラフ情報分析コンピュータと双方向レジスターの導入が行われた。グラフ情報分析コンピュータの導入前は、数字が羅列してあったシートを本部が、店舗に配布しているだけで、POS 情報が十分に活かされていなかった。しかし、グラフ情報分析コンピュータによって、POS 情報をグラフで表示できるようになり、店舗での POS 情報の本格的な利用が行われるようになった。また、双方向 POS レジスターを本部にあるホストコンピュータに接続することで、映画やイベントのチケット販売、公共料金の支払いなどが可能になった。このサービスの開始によって、コンビニエンス業界は従来の小売業の枠を超えた独自の発展を遂げていった。

第4次店舗総合システム（1990～1996）

GOT（Graphic Order Terminal）、ST（Scanner Terminal）、SC（Store Computer）が導入された。GOT、ST、SC の導入前は、商品情報のみが本部から、店舗に送信されていたが、導入後は催事や気候の変化に応じた消費動向を、先行的にアドバイスすることが可能になった。

つまり、それまで蓄積してきた POS 情報を、能動的に販売活動に活かすことが可能になった。また、商品情報以外の情報の付加により情報量が増加した。その対策として、従来使用していた電話回線に比べ大量の情報を伝送することが可能な ISDN を導入し、店舗ベンダー - 本部間でやりとりされる情報をリアルタイムで伝達することを可能にした。

この4次システムのころから、82年に導入されたPOSシステムが定着していることが伺える。このことから、1つの技術が定着するには10年は要するということがわかる。

第 5 次総合店舗情報システム (1996 ~)

衛星通信と ISDN (Integrated Services Digital Network) を統合したネットワークの構築を実現、マルチメディア端末を設置するなど、多くの技術が導入されているが、本論文では 2 点について説明する。まず、このシステムの最大の特徴は衛星通信の導入である。通信速度を従来の 45 倍に向上すると同時に、通信費を約 20% 削減することに成功している。通信衛星を使っても 20% も削減できることから、その通信費が、かなり膨大であったことが想像できる。また、興味深いのが新たに導入された POS システムである。導入前は、商品がいつ、どれだけ、誰に売れたのかという情報を蓄積していたのだが、それに加えて、この商品が、どの商品と一緒に買われているのかといった関連購買の傾向をつかむことを可能にした。これは従来の POS システムの新たな展開と考えられる。

ここで注目すべきは、これらの技術導入の時期である。ほぼ 5 年に一回の間隔で行っていることがわかる。このことを踏まえて同社の売上高の解析を行った。

5.4 技術導入による繁栄

5 年毎の技術導入が売上高にどのような影響を与えているのか調べるために、5 年間の売上高データに回帰曲線を外挿してみた。添付資料 P.46 からの図 1~5 がそれである。図中の値 R は、ピアソンの相関関数 (添付資料 P.48) で最大値 1 のとき、実際のデータと、回帰曲線の完全な一致を示す。 R を見れば、回帰曲線がデータをよく近似していることがわかる。このことから、5 年毎に売上高が直線で近似できることがいえる。つまり、§5.2 で述べた線形近似が有効であることを意味している。

そこで、それら 5 本の回帰曲線を売上高推移のグラフに外挿したのが図 5.3 である。外挿した回帰曲線には、その区間と、前区間との勾配比を記入している。この比が常に 1 以上であることから、5 年毎に売上高が伸びていることがわかる。

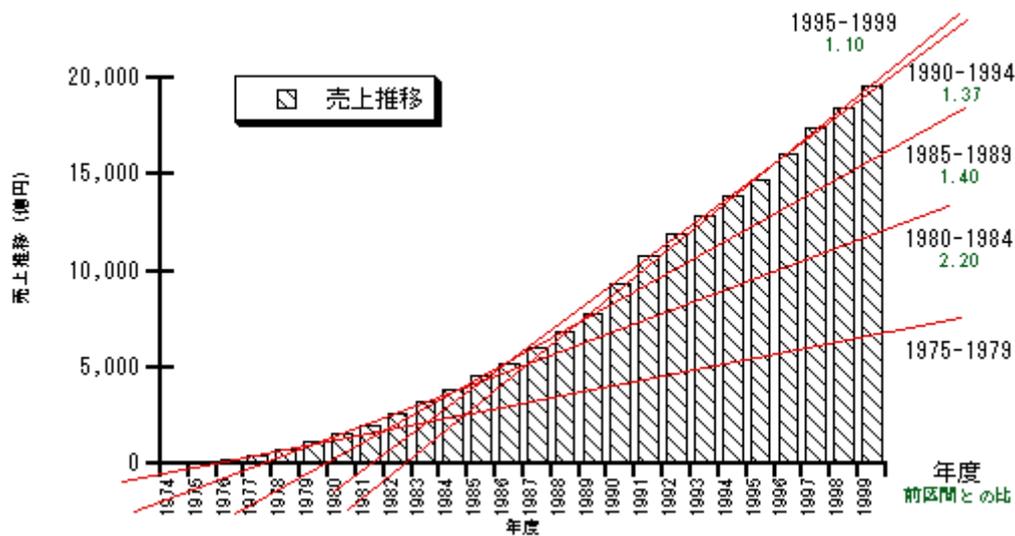


図 5.3 : 売上高推移と予想値の外挿

また、外挿した直線から予想値が計算できることは § 5.2 で、すでに述べた。この予想値を実際の数値が上回っていることから、これが case1、つまり、近似をとった 5 年間における技術導入が成功を収めていること。全ての区間において、このことが言えることから、5 回の大きな技術導入が、全て成功していることによって右肩上がりの成長を維持していることがわかる。

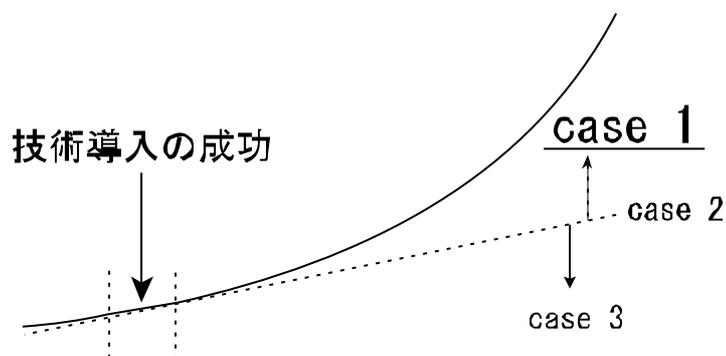


図 5.4 : 成功とその要因

以上のことから、5 年毎の技術導入が売上高の成長要因であることがわかる。つまり、企業が成長を持続させるためには、定期的な技術導入が必要であることがわかる。同様のことが異業種の優良企業にもいえることがわかった。次にそれについて述べる。

5.5 優良企業の条件^(6,7)

コンビニエンス業界以外にも、優良企業はもちろん存在する。その優良企業の判断基準は、3年前にマッキンゼー(McKinsey&Company)が作成したレポートによると、平均売上成長率8パーセント以上、3年間平均のROI(投下資本利益率)10パーセント以上という2点を満たしているかどうかである。

以上の2点を満たしているのは、金属加工、産業機械、食品産業などの12社であった。これらの企業に共通して言えることは、年間に5、6回のM&A(Merger and Acquisition: 企業の合併・買収)を実施し、数多くの技術革新で高成長を継続していることである。これはコンビニエンス業界の定期的なシステム構築導入に相通じるものがあり、成功している企業というのは頻繁に技術革新、技術導入を行っているということが言える。

下の図5.5は、セブンイレブンジャパンの過去10年間の売上高成長と平均を表したもので、この売上成長率のみを見ると、セブンイレブンジャパンは優良企業の1つであると言える。

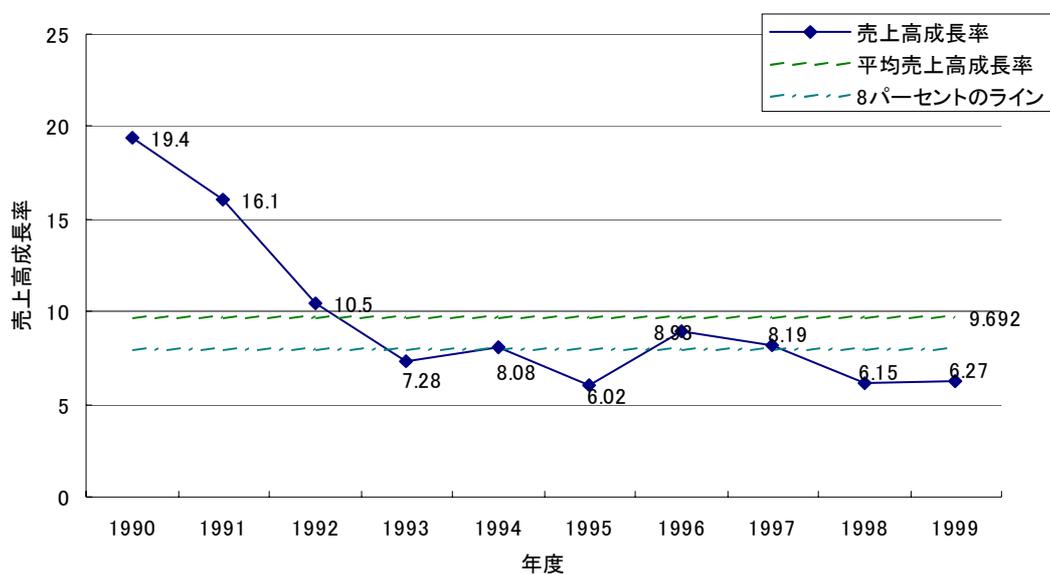


図 5.5 : 過去10年間の売上高成長率と平均

5.6 結論

成長を持続している企業は頻繁に技術革新、技術導入を行っている

5.7 まとめ

企業として成功をおさめ、右肩上がりの成長をし続けるためには、定期的な技術導入がその基盤としての大きな役割を果たしている。コンビニエンス業界は定期的に先を見越したシステムの再構築をすることで、一世代という短期間の間にここまで大きく成長し、結果を生み出した。

今回の論文を通じて、成功を遂げている企業がどのようなタイミングで技術導入を行っているのかを、確実なデータを基にした定量的な観点から捉えることができた。この経験を活かし、時代が求める技術、すなわち、過去を活かしこれからのことを考慮した最適な技術とは何かということを念頭におきながら今後研究を進めていきたい。

6. おわりに

本論文の3つのテーマに共通するのは、数学的な理解が必要となることである。

量子力学では現象を説明する際に数式を用いなければならない。冒頭でも述べたように数学が言葉であり、現象を説明する道具であるということを実感した。

また、数値計算法について、入力値や許容誤差によっては正しい解が出力されない場合があることを経験できた。それと同時に、高度な計算になる程、自分が何を計算しているのか、計算結果が本当に正しいのかを自分で判断しなければならないと知った。

コンビニエンス業界について調査した「データとデータ解析」では、以前から需要を視野にいた技術開発の重要性について聞いてはいたが、研究を終えた今は、実感として、これを受け入れられるようになった。

最後に、この研究が私にとって貴重な経験であったことを明記して終わりとする。

7. 謝辞

今回の論文を書くにあたり、まず、担当教員の山本哲也助教授に謝辞を述べたいと思います。先生の日頃からのご指導がなければ、この論文は書けませんでした。

そして、卒業研究の中間発表の際に、私の不備を指摘してくださった井上昌昭助教授と野中弘二助教授、実験講師の武田 光由先生には深く感謝します。本当に有難うございました。また研究員はじめ、同学科の先生からの意見を頂くことで、この論文に客観性を持たせることが出来たと感じています。ここに記すことで謝辞に替えさせていただきます。有難うございました。

8. 参考文献

「量子力学と古典力学の関係」

1. 量子力学(1) 改訂版 株式会社裳華房
小出 昭一郎 著

「高次代数方程式と数値計算法」

1. 詳解 FORTRAN 演習 共立出版株式会社
伊藤文子 中村明子 共編

2. FORTRAN プログラミング 500 題 日刊工業新聞社
田中 廣 著

3. 東京工業大学 大学院 理工学研究科
地球惑星科学専攻 岡本太郎助手のホームページ
(<http://www.geo.titech.ac.jp/kaneshimalab/taro/taro.html>)

「データとデータ解析」

- (1) セブンイレブンジャパンホームページ (<http://www.sej.co.jp/>)
- (2) セブンイレブンの秘密 こう書房 国友隆一 著
- (3) 龍谷大学経営学部寺島ゼミホームページ
(<http://ha1.seikyou.ne.jp/home/teratti/kazu/>)
- (4) 原口隼人のホームページ
(<http://www2.kyoto-su.ac.jp/~haraguti/index-j.html>)
- (5) セブン - イレブンだけがなぜ強い
産能大学出版部 石川昭 根城泰 共著
- (6) 日本経済新聞 2000 年 11 月 27 日の特集記事「強い企業を創る」
- (7) McKinsey&Company 日本支社 (<http://www.mckinsey.co.jp/>)

添付資料

31 ページのプログラム fxcal のソース

```
C      fxcal.f (Regular-Falsi method)
      F(X)=X**3.0-2.0*X**2.0-X+2.0
      double precision A,B,M
      character *21 E
      A=1.25
      read (5,100) B
      E='erroneues input value'
100    format (D6.2)
      FA=F(A)
      FB=F(B)
      M=FA*FB
      if(M.LE.0) then
10      C=(A*FB-B*FA)/(FB-FA)
      FC=F(C)
      if(ABS(FC)-1.0E-7) 50,50,20
20      if (FA*FC) 30,40,40
30      B=C
      FB=FC
      write (*,200) FC
      go to 10
40      A=C
      FA=FC
      write (*,200) FC
      go to 10
50      write(*,200) FC
200    format (1H ,E13.6)
      else
      write (*,*) E
      endif
      end
```

31 ページ $|f(c)| > \varepsilon$ のところで収束している様子 (入力値 A=1.25, B=3.6) _____

計算回数	$f(c)$	20	-3.44555E-02	40	-1.10149E-04	60	-9.53674E-07
1	4.83780E-01	21	-2.60010E-02	41	-8.24928E-05	61	-9.53674E-07
2	5.41401E-01	22	-1.95861E-02	42	-6.19888E-05	62	-9.53674E-07
3	5.88936E-01	23	-1.47338E-02	43	-4.64916E-05	63	-9.53674E-07
4	6.20432E-01	24	-1.10724E-02	44	-3.48091E-05	64	-9.53674E-07
5	6.31119E-01	25	-8.31389E-03	45	-2.57492E-05	65	-9.53674E-07
6	6.18769E-01	26	-6.23941E-03	46	-1.90735E-05	66	-9.53674E-07
7	5.84486E-01	27	-4.68040E-03	47	-1.43051E-05	67	-9.53674E-07
8	5.32511E-01	28	-3.50952E-03	48	-1.04904E-05	68	-9.53674E-07
9	4.69086E-01	29	-2.63143E-03	49	-7.62939E-06	69	-9.53674E-07
10	4.00896E-01	30	-1.97220E-03	50	-5.72205E-06	70	-9.53674E-07
11	3.33729E-01	31	-1.47820E-03	51	-4.29153E-06	71	-9.53674E-07
12	2.71722E-01	32	-1.10769E-03	52	-3.33786E-06	72	-9.53674E-07
13	2.17236E-01	33	-8.29935E-04	53	-2.38419E-06	73	-9.53674E-07
14	1.71138E-01	34	-6.22272E-04	54	-1.90735E-06	74	-9.53674E-07
15	1.33257E-01	35	-4.65870E-04	55	-1.43051E-06	75	-9.53674E-07
16	1.02819E-01	36	-3.49045E-04	56	-9.53674E-07	76	-9.53674E-07
17	7.87745E-02	37	-2.61307E-04	57	-9.53674E-07	77	-9.53674E-07
18	6.00252E-02	38	-1.95980E-04	58	-9.53674E-07	78	-9.53674E-07
19	4.55494E-02	39	-1.46866E-04	59	-9.53674E-07	79	-9.53674E-07

37 ページで引用した 5 年毎の売上高に回帰曲線を外挿した図

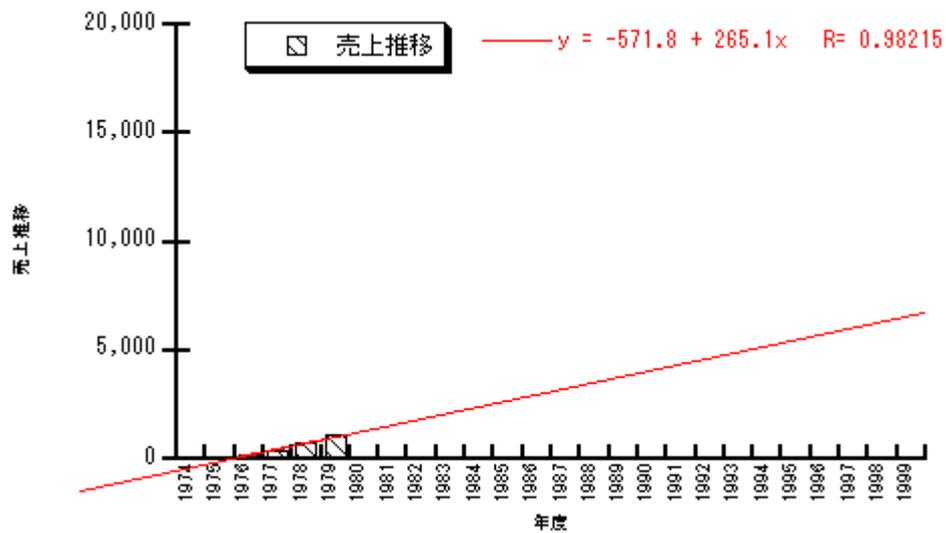


図 1 : 1975 ~ 79 年の売上推移と回帰曲線

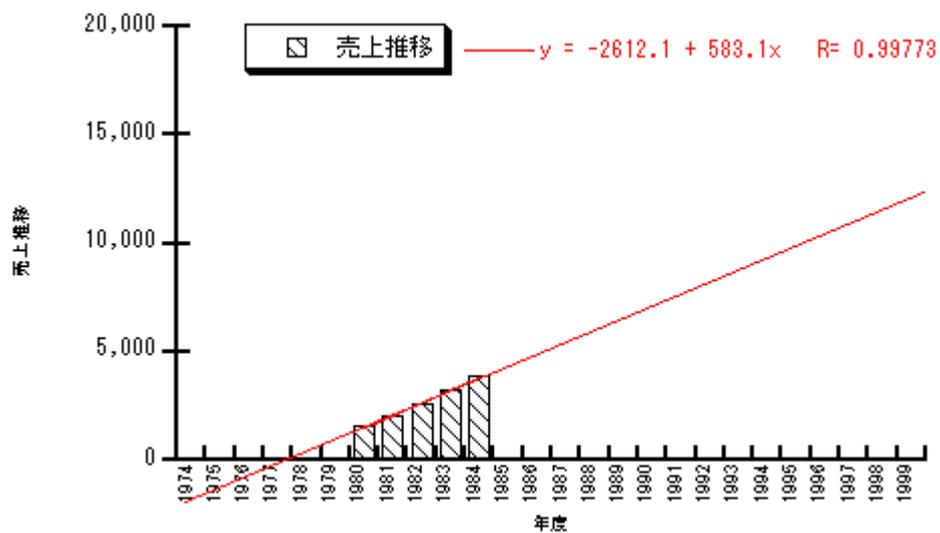


図 2 : 1980 ~ 84 年の売上推移と回帰曲線

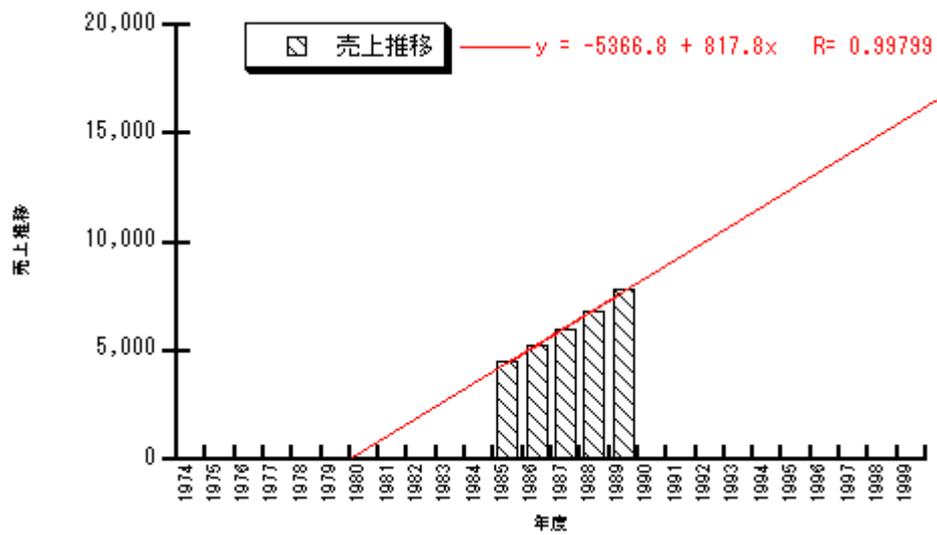


図 3 : 1985 ~ 89 年の売上推移と回帰曲線

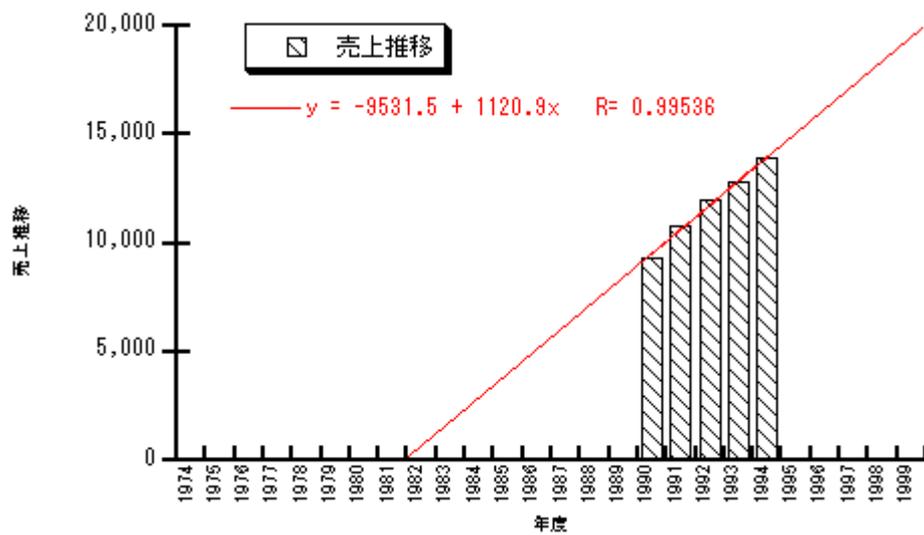


図 4 : 1990 ~ 94 年の売上推移と回帰曲線

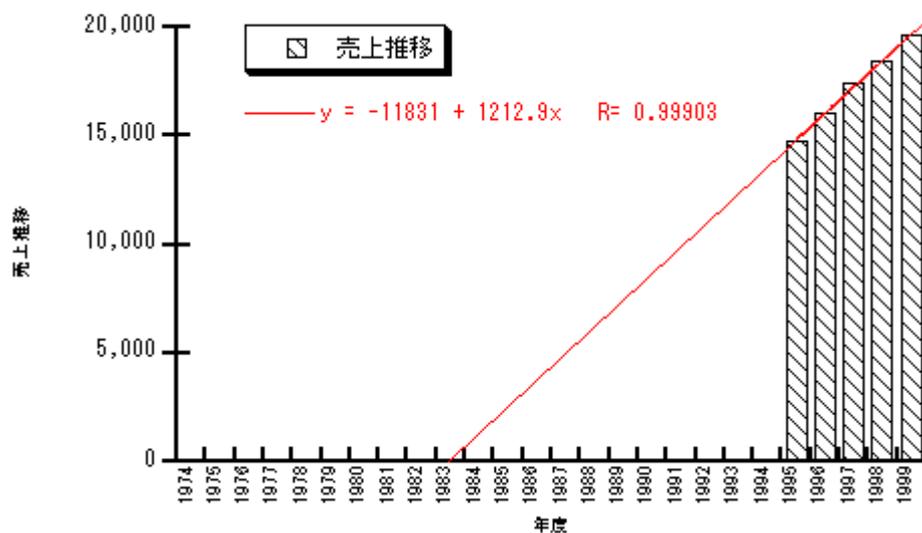


図 5 : 1995 ~ 99 年の売上推移と回帰曲線

ピアソンの相関関数 (一般) 37 ページ

χ^2 : カイ二乗 σ_i : 重み y_i : 実際の値 \bar{y} : 実際の値の平均 s

$$R = \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{\sum_i \sigma_i (y_i - \bar{y})^2}}$$