

平成 1 2 年度

卒業論文

**三角形要素を用いた流路流れの  
有限要素解析**

高知工科大学工学部  
知能機械システム工学科  
知能流体力学研究室

雨森 大治

## 目次

第1章 序論	
1.1 はじめに	1
1.2 研究目的	2
1.3 有限要素法の概要	2
1.4 有限要素法の特徴	4
第2章 支配方程式と計算条件	
2.1 支配方程式	6
2.2 無次元化	6
2.3 解析領域	7
2.4 メッシュ生成	8
2.5 境界条件	8
第3章 計算方法	
3.1 S M A C法	9
3.2 重み付き残差法	10
3.3 補間関数	11
3.4 有限要素方程式の誘導	13
3.5 係数行列の積分	16
3.6 有限要素方程式の展開	21
第4章 計算結果と考察	24
第5章 結論	30
参考文献	31
謝辞	32

## 第1章 序 論

### 1.1 はじめに

有限要素法とは，1950年代に固体力学や構造解析のために開発された手法である．その後，重み付き残差法をベースとした有限要素法の出現により1970年前後から流れ解析への適用が始まった．従来，流れ解析においては差分法が用いられることが多かったが，そのとき以来，有限要素法が着実に流れ解析にも浸透してきている．

有限要素解析について特色を述べると，従来，数値流体解析に用いられることがもっとも多い差分法では，微分方程式の各項に対し，それぞれ差分式を適用することにより，差分方程式が直接得られることになるが，これに対して有限要素法では，まず重み付き残差法や変分原理に基づいて，微分方程式の問題が解析対象領域に関するもとの問題と等価な積分方程式に変換される．そして積分範囲を「要素」と称する三角形や四角形の部分小領域に分割し，要素ごとの積分をすることにより有限要素方程式が得られる．このように有限要素法では有限要素方程式を得る過程に差分法よりも数学的な手続きが必要であり，そのため解析プログラムもより複雑なものとなる．言い換えれば，差分法が直接的な近似表現であるのに対し，有限要素法は間接的な近似表現であると言える．よって，差分法が有限要素法に比べて受け入れやすいのは，この直接的な近似表現によるものと考えられる．

一方，有限要素法にも利点がある．それは分割に用いられる要素は形，大きさ，向きなどを自由に選べることであり，従って，複雑な形状をした領域を分割し，解析することが容易にできる．また，微分方程式の境界条件には，微分方程式が対象としている物理量が直接規定される条件だけでなく，別の物理量で規定される条件も取り入れることが可能である．このような境界条件は，微分方程式の問題を重み付き残差方程式や変分方程式の問題に置き換えるときに「自然境界条件」として取り込まれ，対応する有限要素方程式が誘導される．このように，有限要素法は解析対象の形状や境界条件の取り扱いに優れている．この特色によって，境界形状や境界条件の異なる問題に対して入力データを変えるだけで対応できるような解析手法が実現されている．

## 1.2 研究目的

本研究の目的は、最終研究目標である血管内における血液流れの有限要素解析を行うため、有限要素法について理解することである。

血管内に狭さくが存在すると正常な血流が妨げられ、これによる血流の乱れという流体力学的な要因が狭さく部での動脈疾患等に関係しているため、近年多くの機械工学者や医学研究者の関心を集めている。この狭さく部において局所的に動脈疾患が発生する原因や、狭さく自体の出現や成長の原因についてはこれまでさまざまな説が提唱されてきたが、いまだに決定的な説はなく狭さく管内の血流の解明が急がれている。

今回は時間がなかったため、この血流の解析方法として用いる有限要素法について理解するために三角形要素を用いてニュートン流体の急縮小流路流れを有限要素解析することにする。

## 1.3 有限要素法の概要

一般に自然現象を解明する場合は、微分方程式とその境界条件を用いて解析されるのが通例である。一方、コンピュータによって計算を行う場合は、解析領域にとられた独立した点における離散化量に置き換えて計算を行わなくてはならない。有限要素法は、いわばこの離散化手法の一種であり、コンピュータにより、非常に未知数の多い多元連立方程式が比較的簡単に解けるようになったことを前提としている。

言い換えれば、有限要素法とは、領域を要素と呼ばれる有限の大きさをもった図形の集まり(2次元問題では三角形や四角形)に置き換えて、微分方程式の近似解を得る数値解析手法の一種である。

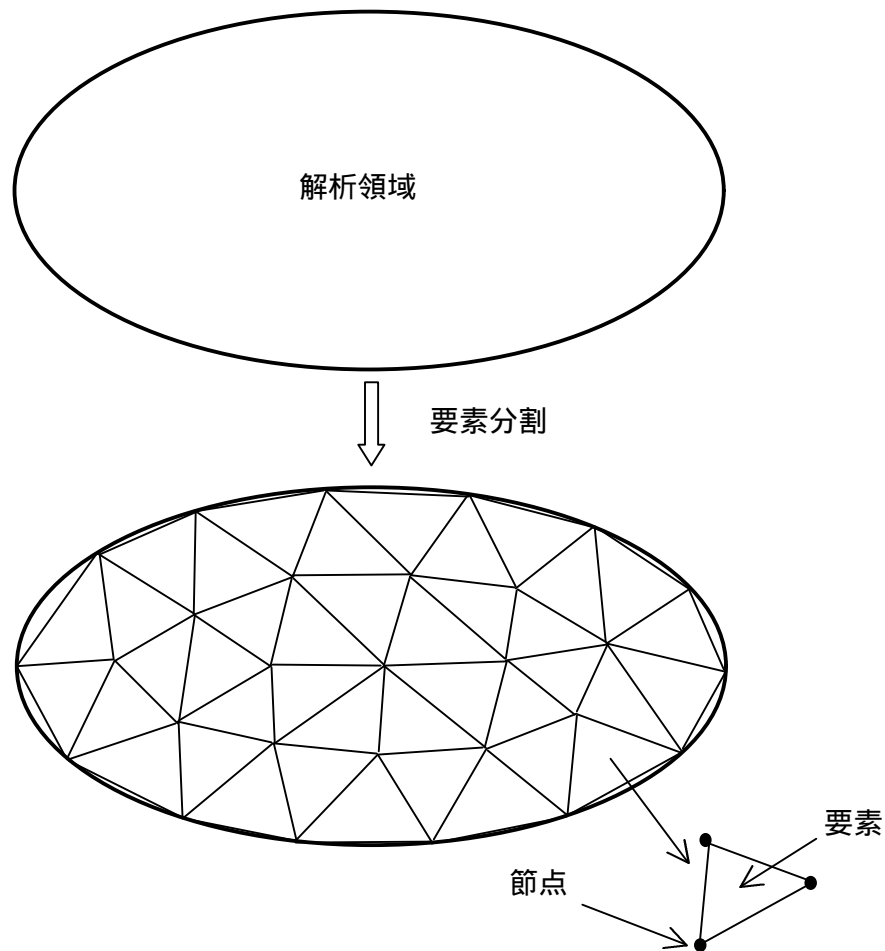


図 1.1 要素分割

そこでまず、図 1.1 のような 2 次元領域の有限要素近似を考え、その手順の概略を示す。

解析する領域を、任意の形状をもつ有限な大きさの三角形または四角形で置き換える。ここで置き換えられた領域 1 つ 1 つを有限要素と呼ぶ。

微分方程式から重み付き残差方程式を作成する。これは、微分方程式に重みを付けて解析領域全体で積分した方程式に変換することである。

個々の有限要素内部の未知数を要素の節点での値を用いて補間する方程式を作成する。この近似式には、多項式が用いられることが多く、一般に補間関数と呼ばれている。このとき、重み関数についても補間関数と同一の補間方程式により補間することが多い。

重み付き残差方程式と補間関数とにより、個々の有限要素に対する離散化した有限要素方程式を作成する。

個々の有限要素について作成された有限要素方程式を重ね合わせることで、解析領域全体の離散化方程式(全体方程式)を得る。

解析領域全体の連立方程式を解いて近似解を求める。

以上のようなが、このうち特に、すなわち個々の有限要素方程式について離散化方程式を作成し、これを重ね合わせて全体の連立方程式を作成することが、有限要素法のもつ最大の特色のひとつである。

ここで述べた ~ のそれぞれのステップにおいては数々の手法が提案されている。従って、与えられた問題に対して、もっとも適当な方法をそれぞれ選択して解析を行う必要がある。

#### 1.4 有限要素法の特徴

ここでは、有限要素法と差分法とを比較しつつ、有限要素法の特徴を述べることにする。

##### (1) 近似方法について

有限要素法は間接的近似法であるのに対し、差分法では直接的近似法である。

差分法は、基礎方程式に含まれる微分を直接差分で置き換えるという操作によって近似解を得る方法であるため、直接的に理解しやすい。これに対して有限要素法は、基礎方程式をいったん重み付き残差方程式に変換した後に近似するという間接的な方法を用いている。

このように、有限要素法で近似解を得るためには、多少複雑な間接的手順を踏まなくてはならない。しかし、多くの場合この重み付き残差方程式には、自然境界条件として微係数で与えられる境界条件を含み、自然にそれらを満足させることができる。

##### (2) メッシュ作成方法について

図 1.2 のように、差分法は原則として規則的に配置された正方格子点を前提としているのに対し、有限要素法では全く任意に配置された分割点を前提としている。そのため、有限要素法では、離散化の過程でまず初めに個々の有限要素ごとに離散化した方程式を作成しておき、これを解析領域内の分割点について重ね合わせる方法で全体方程式を作成している。

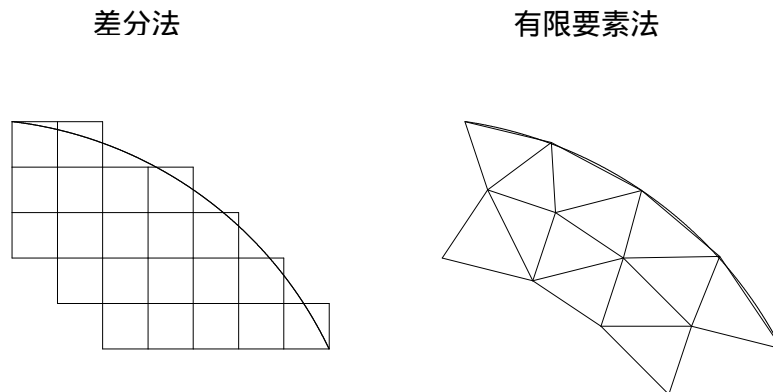


図 1.2 メッシュ作成

これにより、解析領域の形状を全く任意に選択することができ、複雑な形状も無理なく近似することができる。さらに、現象が複雑にかつ急激に変化するような部分は分割をより細かく、また現象の変化が穏やかな部分では分割を粗くすることができる。

### (3) 境界条件の設定について

有限要素で扱う境界条件が、差分方に比べてプログラムの作成上非常に都合が良いことが多い。

差分法では、たとえば微係数で与えられた境界条件や、斜めに傾斜した境界の処理には特別な近似式を考案する必要がある。しかし、有限要素法では重み付き残差方程式の自然境界条件として処理される場合が多く、この場合には特別な処理を行うことなしに境界条件の処理を行うことができる。

以上のことから、有限要素法は差分法に比べて血管などの複雑な形状領域の流れ解析に大変有利である。

## 第2章 支配方程式と計算条件

### 2.1 支配方程式

流れ場を支配する方程式は、質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則である。連続体力学では、これらの法則を微分方程式の形で記述する。各保存則は、それぞれ連続の式、Cauchy の運動方程式、エネルギー方程式と呼ばれ、これらの方程式はいかなる流体にも適用できる。等温流れ場の場合は、エネルギー方程式を省略できる。さらに支配方程式には、流体の応力と歪みの関係を記述した構成方程式が加わる。

連続の式は、非圧縮性流体の場合、

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (2.1)$$

である。アスタリスク\*は有次元量を表す。v\*は速度ベクトルである。

Cauchy の運動方程式は、

$$r \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* \right\} = -\nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* \quad (2.2)$$

である。rは流体密度、t\*は時間、τ\*は偏差応力テンソルである。

ニュートン流体の構成方程式は、

$$\boldsymbol{\tau}^* = m \left\{ \nabla^* \mathbf{v}^* + (\nabla^* \mathbf{v}^*)^T \right\} \quad (2.3)$$

である。mは粘性係数である。式(2.3)を式(2.2)に代入するとニュートン流体の運動方程式として一般によく知られているナビエ・ストークス(Navier-Stokes)方程式となる。しかし、代入せずに連立して解くことにより、式(2.3)を血液の構成方程式に変えることのみで血液流れの支配方程式を導き出すことができ、つまり汎用性に優れている。

### 2.2 無次元化

流れ問題では、無次元量をパラメータにして考察する場合が多い。これは、流体力学では相似法則が成り立つためである。流れシミュレーションにおいても、支配方程式を無次元化して解く方が便利である。そこで、有限要素法で定式化する前に、支配方程式を無次元化する。無次元化には、代表長さHと代表流速Uを用いる。

支配方程式に現れる有次元量は次式で無次元化される。

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^*}{U}, \quad \nabla = \nabla^* H, \quad t = \frac{t^*}{H/U}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{\tau}^*}{mU/H}, \quad p = \frac{p^*}{rU^2} \quad (2.4)$$



アスタリスク\* が付かない各変数は無次元量を示す。式(2.4)の有次元量を支配方程式に代入して整理すると、無次元化された支配方程式を得る。

連続の式は次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.5)$$

Cauchy の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.6)$$

構成方程式は次のようになる。

$$\tau = \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (2.7)$$

ここで、式(2.6)中の Re は無次元化のパラメータとしてはよく知られているレイノルズ (Reynolds) 数で、粘性力に対する慣性力の比を表し、

$$\text{Re} = \frac{\rho U H}{\mu} \quad (2.8)$$

である。

### 2.3 解析領域

解析領域として図 2.1 のような上流と下流の流路幅が 5 対 1 である 2 次元急縮小流路を用いる。この流路にニュートン流体を流し、有限要素法を用いてその流れの数値計算を行う。

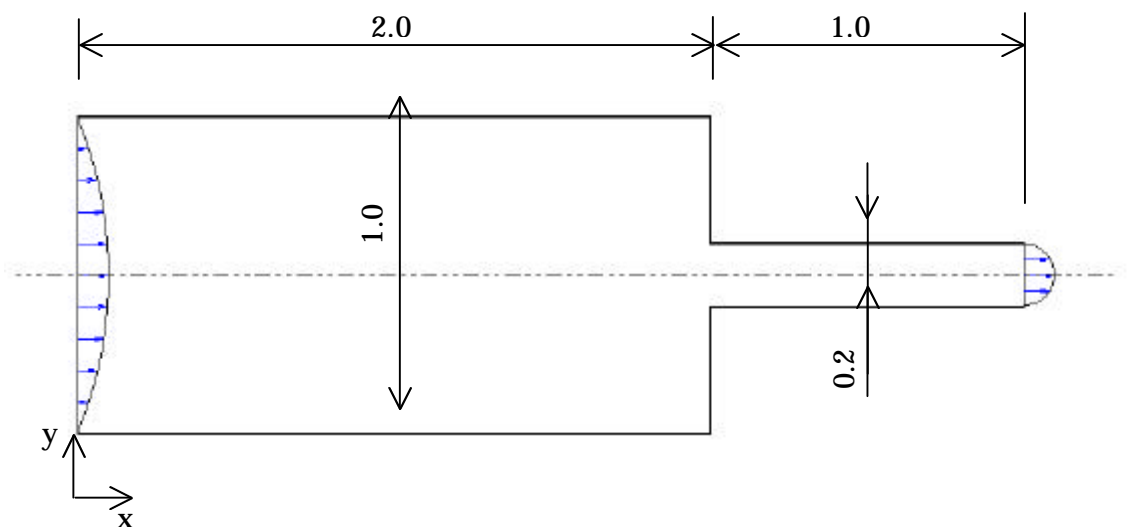


図 2.1 解析領域

## 2.4 メッシュ生成

解析領域を下の図 2.2(節点数 622, 要素数 1120)のように三角形 1 次要素で分割し, 各節点に節点番号をつけその座標と, 各要素がどの 3 節点で構成されているかの要素と節点の関係を示すメッシュデータを作成する. 急縮小部は流れの変化が大きいため分割をより細かくした.

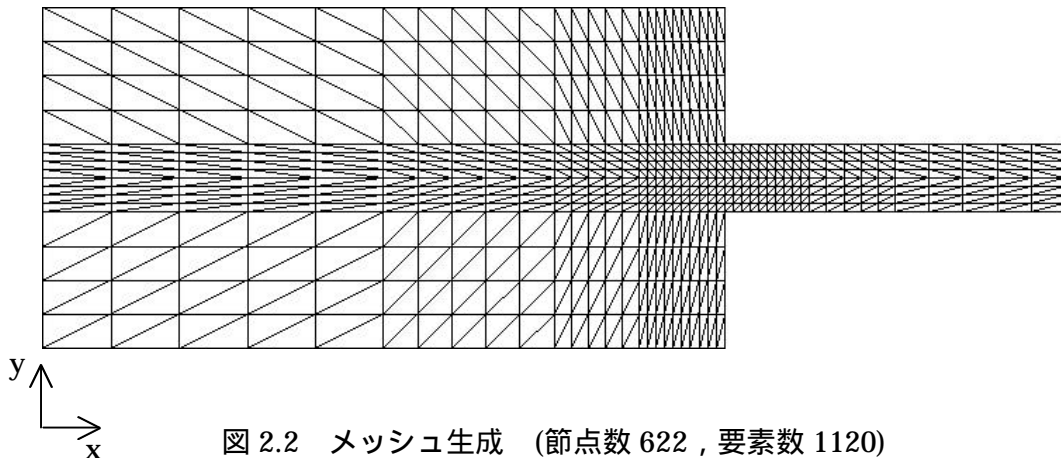


図 2.2 メッシュ生成 (節点数 622, 要素数 1120)

## 2.5 境界条件

壁面での境界条件を次のようにする.

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{u} = 0.0, \quad \tilde{v} = 0.0 \\ u = 0.0, \quad v = 0.0 \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

入口での境界条件を次のようにする.

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{u} = -6y^2 + 1.5, \quad \tilde{v} = 0.0 \\ u = -6y^2 + 1.5, \quad v = 0.0 \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

出口の境界条件を次のようにする.

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{u} = -750y^2 + 7.5, \quad \tilde{v} = 0.0 \\ u = -750y^2 + 7.5, \quad v = 0.0 \\ p = 0.0 \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

ここで,  $u, v$  はそれぞれ  $x$  方向  $y$  方向流速で,  $\tilde{u}, \tilde{v}$  はそれぞれ  $x$  方向  $y$  方向中間流速である. 中間流速についての定義は後で説明する.

これらの式(2.5), (2.6), (2.7)および境界条件(2.9), (2.10), (2.11)を用いて流路, 図 2.1 におけるニュートン流体流れの有限要素解析を行う.

### 第3章 計算方法

#### 3.1 SMAC 法

運動方程式の計算方法として SMAC 法を用いる。

まず基礎方程式に対する時間方向の離散化を以下のように行う。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n = -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{n} = \nabla \mathbf{v}^n + (\nabla \cdot \mathbf{v}^n)^T \quad (3.3)$$

次に流速の予測子として中間流速  $\tilde{\mathbf{v}}$  を以下のように定義する。

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^n - \Delta t \left\{ (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{n} \right\} \quad (3.4)$$

境界条件は、

$$\tilde{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}, \quad \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \hat{t} \quad (3.5)$$

であり、 $\hat{\mathbf{v}}$  は既知量を示し  $\mathbf{n}$  は境界上の外向き法線ベクトルである。Cauchy の運動方程式 式(3.2)から式(3.4)を引くと速度場  $\mathbf{v}^{n+1}$  に関する

$$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}} - \Delta t \nabla p^{n+1} \quad (3.6)$$

が得られる。式(3.6)の両辺の発散をとり、非圧縮の連続の式を代入して整理すると、次の圧力に関するポアソン(Poisson)方程式が導かれる。

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (3.7)$$

なお、このポアソン方程式に対する境界条件は次のように与えられる。

$$p^{n+1} = \hat{p}, \quad (\nabla p^{n+1}) \cdot \mathbf{n} = \hat{q} \quad (3.8)$$

式(3.6)に式(3.4)から得られた  $\tilde{\mathbf{v}}$  と式(3.7)で得られた  $p^{n+1}$  を代入すると速度場  $\mathbf{v}^{n+1}$  が計算される。以上から計算手順をまとめれば次のようになる。

- 、式(3.3)より、偏差応力  $\mathbf{n}$  を求める。
- 、式(3.4)と境界条件(3.5)より、中間流速  $\tilde{\mathbf{v}}$  を求める。
- 、式(3.7)と境界条件(3.8)より、圧力  $p^{n+1}$  を求める。
- 、式(3.6)より、速度  $\mathbf{v}^{n+1}$  を求める。

### 3.2 重み付き残差法

先の計算手順に示したとおり，解かなければならない方程式は，式(3.3)，(3.4)，(3.6)，(3.7)である．そこで，これらの式を有限要素を用いて定式化する．まず，任意の重み関数  $\mathbf{V}, P$  を用いて次の重み付き残差方程式を誘導する．

構成方程式(3.3)は次のようになる．

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^n d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}^n d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v}^n)^T d\Omega \quad (3.9)$$

中間流速の式(3.4)は次のようになる．

$$\int_{\Omega} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{v}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{V} \mathbf{v}^n d\Omega - \Delta t \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{V} (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n d\Omega - \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{v}^n d\Omega \right\} \quad (3.10)$$

圧力ポアソン方程式(3.7)は次のようになる．

$$\int_{\Omega} P \nabla^2 p^{n+1} d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} P \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\Omega \quad (3.11)$$

流速を求める式(3.6)は次のようになる．

$$\int_{\Omega} \mathbf{V} \mathbf{v}^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{v}} d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{V} \nabla p^{n+1} d\Omega \quad (3.12)$$

次に，式(3.11)中の 2 次の微分係数の項を部分積分し，発散定理を適用して次のように変形する．

$$\int_{\Gamma} P (\nabla p^{n+1}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla P \nabla p^{n+1} d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} P \nabla \tilde{\mathbf{v}} d\Omega \quad (3.13)$$

この式(3.13)中の  $\int_{\Gamma} ( ) d\Gamma$  の積分は解析領域  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  上で ( ) 内の自然境界条件を積分することを表しており，特別な場合を除いてゼロとして取り扱われることが多い．

以上から，求めるべき方程式の重み付き残差方程式をまとめると次のようになる．

$$\int_{\Omega} \tilde{v}^n d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}^n d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v}^n)^T d\Omega \quad (3.14)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{v}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{V} \mathbf{v}^n d\Omega - \Delta t \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{V} (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n d\Omega - \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \mathbf{V} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^n d\Omega \right\} \quad (3.15)$$

$$\int_{\Gamma} P(\nabla p^{n+1}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla P \nabla p^{n+1} d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} P \nabla \tilde{\mathbf{v}} d\Omega \quad (3.16)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{V} \mathbf{v}^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{v}} d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{V} \nabla p^{n+1} d\Omega \quad (3.17)$$

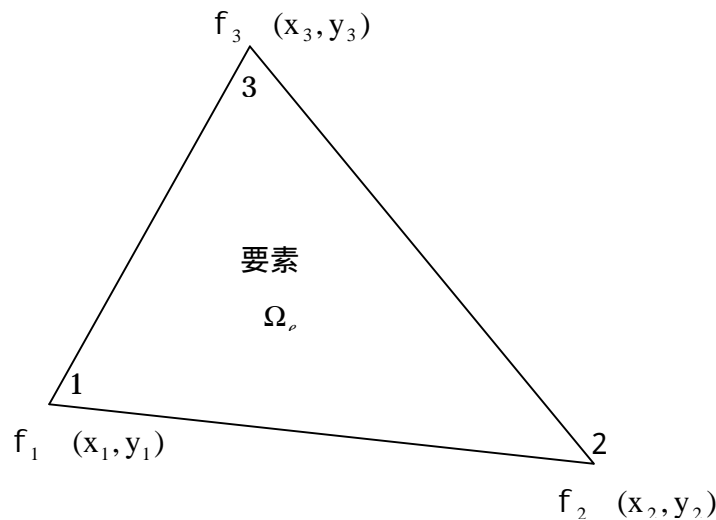


図 3.1 要素節点と未知関数

### 3.3 補間関数

有限要素法では有限要素と呼ばれる部分領域 \$\Omega\_e\$ で解析領域 \$\Omega\$ を分割する．有限要素法では未知変数をこの部分領域 \$\Omega\_e\$ ごとにある種の関数(補間関数)によって近似している．補間関数の取り方には非常に多くの方法があるが，本研究ではもっとも簡単な三角形 1 次有限要素による補間法を用いる．今，図 3.1 に示すような三角形要素領域があり，この領域内の任意の点の未知関数を 3 節点での値より補間することを考える．そこで，要素内における未知関数 \$f\$ の分布を 2 次元座標 \$x, y\$ を用いて 1 次元で表すものと仮定する．すなわち，

$$f = h_1 + h_2 x + h_3 y = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

ここに,  $h_i (i=1\sim 3)$ は未知定数であり, これを要素補間関数と呼ぶ.

式の要素補間関数は3つの節点上ではそれぞれの節点値 $f_i (i=1\sim 3)$ と等しくなければならない. この条件は次式で表される.

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

これを未知定数 $h_i (i=1\sim 3)$ について解くと次のようになる.

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

ここでマトリックス内の係数は次式で表される.

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

記号 $\Delta$ は三角形部分領域 $\Omega_e$ の面積で, これは3節点の座標によって次のように算出することができる.

$$\Delta = \frac{1}{2} \{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} \quad (3.22)$$

以上より，要素補間関数  $f(x, y)$  を 3 つの節点値  $f_i (i=1\sim 3)$  によって次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} f = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} &= [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \\ &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

ここで， $N$  は

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

であり，形状関数と呼ばれる．

### 3.4 有限要素方程式の誘導

先の重み付き残差方程式を

$$\left. \begin{aligned} &= t_{ij}, \quad \tilde{v} = \tilde{v}_i, \quad \mathbf{v} = v_i, \\ \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad &= T_{ij}, \quad \mathbf{V} = V_i \quad (i=1,2, j=1,2) \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

を用いて書き換えると以下ようになる．

$$\int_{\Omega} T_{ij} t_{ij}^n d\Omega = \int_{\Omega} T_{ij} \frac{\partial v_j^n}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij} \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} d\Omega \quad (3.26)$$

$$\int_{\Omega} V_i \tilde{v}_i d\Omega = \int_{\Omega} V_i v_i^n d\Omega - \Delta t \left( \int_{\Omega} V_i v_j^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} d\Omega - \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} V_i \frac{\partial t_{ji}^n}{\partial x_j} d\Omega \right) \quad (3.27)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} P \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.28)$$

$$\int_{\Omega} V_i v_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} V_i \tilde{v}_i d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} V_i \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.29)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} \\ t_{yx} & t_{yy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

である。

この重み付き残差方程式において，未知関数であったものは偏差応力 $t_{ij}$ と流速 $\tilde{v}_i, v_i$ および圧力 $p$ である．そこで，三角形1次有限要素の形状関数を用いて未知関数の補間関数を次のように定める．

$$\left. \begin{aligned} t_{ij} &= N_a t_{ija} \\ \tilde{v}_i &= N_a \tilde{v}_{ia} \\ v_i &= N_a v_{ia} \\ p &= N_a p_a \end{aligned} \quad (i=1,2, j=1,2, a=1\sim 3) \right\} \quad (3.31)$$

ここで， $t_{ij}, \tilde{v}_i, v_i, p$ は三角形要素内に分布する未知関数であり， $t_{aij}, \tilde{v}_{ai}, v_{ai}, p_a$ は3節点における未知関数の値である．また添字 $i, j$ はベクトル，テンソルの添字であり，これと混同することを避けるため，三角形要素の3節点を表す記号として $a$ を用いた．次に，重み関数 $T_{ij}, V_i, P$ の補間関数も先と同様に定義する．

$$\left. \begin{aligned} T_{ij} &= N_a T_{ija} \\ V_i &= N_a V_{ia} \\ P &= N_a P_a \end{aligned} \quad (i=1,2, j=1,2, a=1\sim 3) \right\} \quad (3.32)$$

このように未知関数と重み関数に同じ形の補間関数を用いることをガラーキン(Galerkin)法という．さて，補間関数を用いて未知関数と重み関数の近似式が得られたことから，各変数の偏微分の計算があらかじめ行えることになる．例えば，



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_a}{\partial x} u_a = \frac{\partial(a_a + b_a x + c_a y)}{\partial x} u_a = b_a u_a = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_a}{\partial y} v_a = \frac{\partial(a_a + b_a x + c_a y)}{\partial y} v_a = c_a v_a = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

のようになる．未知変数の微分が，補間関数を用いることにより形状関数の微分に置き換えられる．すなわち，未知変数の微分は形状関数の導関数と三角形要素の節点値との積で表されるということである．以上を用い，三角形要素内で近似された未知変数の補間関数を用いて先の重み付き残差方程式を書き直すと，以下ようになる．

$$\mathbf{T}_{ija} \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega_e \mathbf{t}_{ijb}^n = \mathbf{T}_{ija} \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial x_i} d\Omega_e v_{jb}^n + \mathbf{T}_{ija} \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial x_j} d\Omega_e v_{ib}^n \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} V_{ia} \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega_e \tilde{v}_{ib} &= V_{ia} \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega_e v_{ib}^n \\ &\quad - \Delta t \left( V_{ia} \int_{\Omega_e} N_a N_b \frac{\partial N_g}{\partial x_j} d\Omega_e v_{jb}^n v_{ig}^n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\text{Re}} V_{ia} \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial x_j} d\Omega_e \mathbf{t}_{jib}^n \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$P_a \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \frac{\partial N_b}{\partial x_i} d\Omega_e p_b^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} P_a \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial x_i} d\Omega_e \tilde{v}_{ib} \quad (3.36)$$

$$V_{ia} \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega_e v_{ib}^{n+1} = V_{ia} \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega_e \tilde{v}_{ib} - \Delta t V_{ia} \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial x_i} d\Omega_e p_b^{n+1} \quad (3.37)$$

また，これらをマトリックスの形に書き換えると以下ようになる．

$$\bar{M}_{ab} \mathbf{t}_{bij}^n = H_{abi} v_{ib}^n + H_{abj} v_{ib}^n \quad (3.38)$$

$$\bar{M}_{ab} \tilde{v}_{ib} = \bar{M}_{ab} v_{ib}^n - \Delta t \left( K_{abg} v_{jb}^n - \frac{1}{\text{Re}} H_{abj} \mathbf{t}_{jib}^n \right) \quad (3.39)$$

$$A_{aibi} p_b^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} H_{abi} \tilde{v}_{ib} \quad (3.40)$$

$$\bar{M}_{ab} v_{ib}^{n+1} = \bar{M}_{ab} \tilde{v}_{ib} - \Delta t H_{abi} p_b^{n+1} \quad (3.41)$$

ただし，

$$\left. \begin{aligned}
 M_{ab} &= \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega_e \\
 H_{abi} &= \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial x_i} d\Omega_e \\
 H_{abj} &= \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial x_j} d\Omega_e \\
 K_{abg} &= \int_{\Omega_e} N_a N_b \frac{\partial N_g}{\partial x_j} d\Omega_e v_{ig}^n \\
 A_{arbi} &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \frac{\partial N_b}{\partial x_i} d\Omega_e
 \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

である．一般に式(3.38)～(3.41)を有限要素方程式と呼び，式中のマトリックスは係数行列と呼ばれている．また，式中の $\bar{M}_{ab}$ は $M_{ab}$ を対角集中化した集中質量行列(lumped mass matrix)である．上記の係数行列は次節で説明する．

### 3.5 係数行列の積分

有限要素が三角形要素である場合には，係数行列を求めるときに面積座標を用いるのが便利であり，その方法について説明する．いま，図(3.2)に示した三角形要素内部の任意の1点 $(x, y)$ をとり，この点を頂点とした3つの三角形を考える．このとき，元の三角形要素の面積を $\Delta$ とすると次のような面積座標と呼ばれる座標が定義できる．

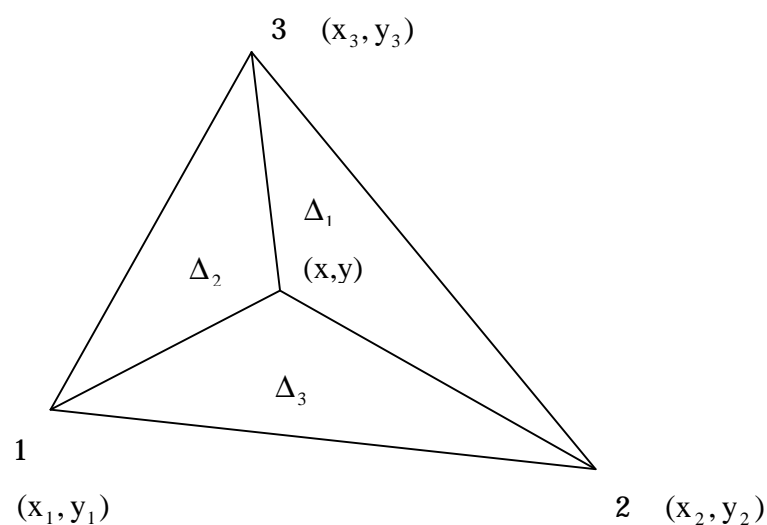


図 3.2 面積座標

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (3.43)$$

この面積座標を先の点 $(x, y)$ を用いて実際に計算すると,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2\Delta} \{x_2 y_3 - x_3 y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)\} = a_1 + b_1 x + c_1 y \quad (3.44)$$

となる．同様に求めると,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 + b_1 x + c_1 y \\ x_2 &= a_2 + b_2 x + c_2 y \\ x_3 &= a_3 + b_3 x + c_3 y \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

が得られる．ここに $a_i, b_i, c_i$ は式によって与えられるものである．この3座標はそれぞれが独立でなく,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (3.46)$$

なる関係にある．さて, 面積座標 $x_i$ は先の形状関数 $N_i$ の式と全く等しく, したがって形状関数の積分が面積座標の積分であることが分かる．また, 形状関数の微係数も面積座標の微係数と等価である．このことから, 面積座標を使って係数行列の積分が可能になるわけである．

面積座標の積分には, 次の面積座標積分公式が用いられる．

$$\iint (x_1^l x_2^m x_3^n) dx dy = 2 \frac{l! m! n!}{(l + m + n + 2)!} \Delta \quad (3.47)$$

ここに, 積分は三角形要素内にて行うものである．また, 形状関数の微係数も面積座標の微係数に置き換えられ, 次のように計算することができる．

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

以上から, 係数行列のすべての計算が可能になった．そこで次に, 各係数行列を実際に計算したものを次に示す．

$M_{ab}$  の計算は次のようになる .

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= \int_{\Omega_e} N_a N_b d\Omega_e \\
 &= \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} [x_1 \quad x_2 \quad x_3] d\Omega_e \\
 &= \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{bmatrix} d\Omega_e = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

$H_{abi}, H_{abj}$  の計算は次のようになる .

<  $i=1, j=1$  の場合 >

$$\begin{aligned}
 H_{ab1} &= \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial x} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_3}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega_e \\
 &= \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} x_1b_1 & x_1b_2 & x_1b_3 \\ x_2b_1 & x_2b_2 & x_2b_3 \\ x_3b_1 & x_3b_2 & x_3b_3 \end{bmatrix} d\Omega_e = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

<  $i=2, j=2$  の場合 >

$$\begin{aligned}
 H_{ab2} &= \int_{\Omega_e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial y} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial x_3}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega_e \\
 &= \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} x_1c_1 & x_1c_2 & x_1c_3 \\ x_2c_1 & x_2c_2 & x_2c_3 \\ x_3c_1 & x_3c_2 & x_3c_3 \end{bmatrix} d\Omega_e = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

$K_{abg}$  の計算は次のようになる .

<  $i=1, j=1$  の場合 >

$$\begin{aligned}
 K_{abg1} &= \int_{\Omega_e} N_a N_b \frac{\partial N_g}{\partial x} d\Omega_e u_g^n \\
 &= (b_1 u_1^n + b_2 u_2^n + b_3 u_3^n) \cdot \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{bmatrix} d\Omega_e \\
 &= \frac{\Delta}{12} (b_1 u_1^n + b_2 u_2^n + b_3 u_3^n) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.52}
 \end{aligned}$$

<  $i=1, j=2$  の場合 >

$$\begin{aligned}
 K_{abg2} &= \int_{\Omega_e} N_a N_b \frac{\partial N_g}{\partial y} d\Omega_e u_g^n \\
 &= (c_1 u_1^n + c_2 u_2^n + c_3 u_3^n) \cdot \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{bmatrix} d\Omega_e \\
 &= \frac{\Delta}{12} (c_1 u_1^n + c_2 u_2^n + c_3 u_3^n) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

<  $i=2, j=1$  の場合 >

$$\begin{aligned}
 K_{abg1} &= \int_{\Omega_e} N_a N_b \frac{\partial N_g}{\partial x} d\Omega_e v_g^n \\
 &= (b_1 v_1^n + b_2 v_2^n + b_3 v_3^n) \cdot \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{bmatrix} d\Omega_e \\
 &= \frac{\Delta}{12} (b_1 v_1^n + b_2 v_2^n + b_3 v_3^n) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

<  $i = 2, j = 2$  の場合 >

$$\begin{aligned}
 K_{abg2} &= \int_{\Omega_e} N_a N_b \frac{\partial N_g}{\partial y} d\Omega_e v_g'' \\
 &= (c_1 v_1'' + c_2 v_2'' + c_3 v_3'') \cdot \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{bmatrix} d\Omega_e \\
 &= \frac{\Delta}{12} (c_1 v_1'' + c_2 v_2'' + c_3 v_3'') \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

$A_{aibi}$  の計算は次のようになる .

$$\begin{aligned}
 A_{aibi} &= A_{a1b1} + A_{a2b2} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_a}{\partial x} \frac{\partial N_b}{\partial x} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_a}{\partial y} \frac{\partial N_b}{\partial y} d\Omega_e \\
 &= \Delta \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3^2 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

なお,  $M_{ab}$  は, 対角集中化された集中化行列  $\bar{M}_{ab}$  に変換できる . この行列を用いることの利点は, 実際に連立方程式を解く際に, 未知数ベクトルに掛ける係数行列を対角集中化しておくことで逆行列の計算が, 単に係数の逆数を右辺側へ掛けるだけとなる点である . このような方法を陽的解法といい, 本研究においてもこの方法を採用している .

$\bar{M}_{ab}$  の計算は次のようになる .

$$\bar{M}_{ab} = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

ここで, マトリックス中の空白部分は各要素における係数が 0 であることを意味している .

### 3.6 有限要素方程式の展開

以上から，係数行列の積分ができたことになる．そこで，これらを用いて先の有限要素方程式をすべて書き換えることができる．

構成方程式(3.38)は次のようになる．

<  $i=1, j=1$  の場合 >

$$\bar{M}_{ab} \mathbf{t}_{11b}^n = H_{ab1} v_{1b}^n + H_{ab1} v_{1b}^n$$

$$\frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{xx1}^n \\ \mathbf{t}_{xx2}^n \\ \mathbf{t}_{xx3}^n \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{bmatrix} + \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

<  $i=1, j=2$  の場合 >

$$\bar{M}_{ab} \mathbf{t}_{12b}^n = H_{ab1} v_{2b}^n + H_{ab2} v_{1b}^n$$

$$\frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{xy1}^n \\ \mathbf{t}_{xy2}^n \\ \mathbf{t}_{xy3}^n \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \end{bmatrix} + \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

<  $i=2, j=1$  の場合 >

$$\bar{M}_{ab} \mathbf{t}_{21b}^n = H_{ab2} v_{1b}^n + H_{ab1} v_{2b}^n$$

$$\frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{yx1}^n \\ \mathbf{t}_{yx2}^n \\ \mathbf{t}_{yx3}^n \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{bmatrix} + \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

<  $i=2, j=2$  の場合 >

$$\bar{M}_{ab} \mathbf{t}_{22b}^n = H_{ab2} v_{2b}^n + H_{ab2} v_{2b}^n$$

$$\frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{yy1}^n \\ \mathbf{t}_{yy2}^n \\ \mathbf{t}_{yy3}^n \end{bmatrix} = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \end{bmatrix} + \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

中間流速の式(39)は次のようになる .

<  $i=1$  の場合 >

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{ab} \tilde{v}_{1b} &= \bar{M}_{ab} v_{1b}^n - \Delta t \left\{ K_{abg1} v_{1b}^n + K_{abg2} v_{2b}^n - \frac{1}{\text{Re}} (H_{ab1} t_{11b}^n + H_{ab2} t_{21b}^n) \right\} \\
 \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix} &= \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{bmatrix} - \Delta t \left\{ \frac{\Delta}{12} (b_1 u_1^n + b_2 u_2^n + b_3 u_3^n) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta}{12} (b_1 u_1^n + b_2 u_2^n + b_3 u_3^n) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{xx1}^n \\ t_{xx2}^n \\ t_{xx3}^n \end{bmatrix} + \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{yx1}^n \\ t_{yx2}^n \\ t_{yx3}^n \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

<  $i=2$  の式 >

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{ab} \tilde{v}_{2b} &= \bar{M}_{ab} v_{2b}^n - \Delta t \left\{ K_{abg1} v_{1b}^n + K_{abg2} v_{2b}^n - \frac{1}{\text{Re}} (H_{ab1} t_{12b}^n + H_{ab2} t_{22b}^n) \right\} \\
 \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{bmatrix} &= \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \end{bmatrix} - \Delta t \left\{ \frac{\Delta}{12} (b_1 v_1^n + b_2 v_2^n + b_3 v_3^n) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta}{12} (b_1 v_1^n + b_2 v_2^n + b_3 v_3^n) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{xy1}^n \\ t_{xy2}^n \\ t_{xy3}^n \end{bmatrix} + \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{yy1}^n \\ t_{yy2}^n \\ t_{yy3}^n \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (3.63)
 \end{aligned}$$



圧力ポアソン方程式(3.40)は次のようになる .

$$\begin{aligned}
 (A_{a_1b_1} + A_{a_2b_2})p_b^{n+1} &= -\frac{1}{\Delta t}(H_{ab_1}\tilde{v}_{1b} + H_{ab_2}\tilde{v}_{2b}) \\
 \Delta \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ p_3^{n+1} \end{bmatrix} \\
 &= -\frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta}{3} \left( \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{bmatrix} \right) \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

流速を求める式(3.41)は次のようになる .

<  $i=1$  の場合 >

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{ab} v_{1b}^{n+1} &= \bar{M}_{ab} \tilde{v}_{1b} - \Delta t H_{ab_1} p_b^{n+1} \\
 \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{bmatrix} &= \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix} - \Delta t \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ p_3^{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

<  $i=2$  の場合 >

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{ab} v_{2b}^{n+1} &= \bar{M}_{ab} \tilde{v}_{2b} - \Delta t H_{ab_2} p_b^{n+1} \\
 \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ v_3^{n+1} \end{bmatrix} &= \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{bmatrix} - \Delta t \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ p_3^{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

以上により, 有限要素方程式の具体的内容が明らかになった. これらを解析領域全体で重ね合わせを行い, Gauss-Jordan 法(掃出し法)<sup>(10)</sup>を用いて数値計算を行う.

#### 第4章 計算結果と考察

以上のように支配方程式を計算条件と計算方法を用いて  $Re=1.0$  とし， $\Delta t=0.0001, \Delta t=0.0003, \Delta t=0.0005$  の場合の数値計算を行い，その計算結果を次のように示す．図 4.1～4.4 は  $\Delta t=0.0001$  の場合，図 4.5～4.8 は  $\Delta t=0.0003$  の場合，図 4.9～4.12 は  $\Delta t=0.0005$  の場合の計算結果を時間とともに変化していく流れの様子をベクトル図として示している．各ベクトル図とも見やすくするために  $x$  方向にベクトルを間引いてある．図 4.13～4.15 は  $\Delta t$  それぞれの場合の圧力分布を等圧力線図として示している．等圧線の間隔は 10 としてある．図 4.16 は縦軸を圧力差  $\Delta p$ ，横軸を時間  $t$  として入口と出口の圧力差の時間変化をグラフで示している．

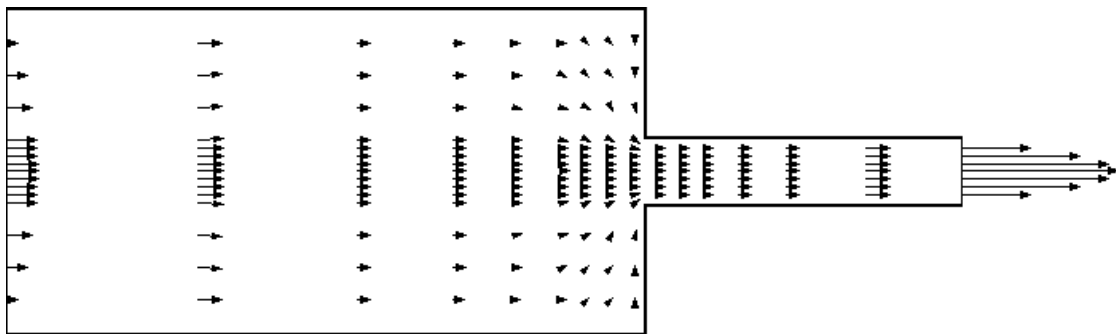


図 4.1 流速ベクトル図 ( $Re=1.0, \Delta t=0.0001, t=0.0001$ )

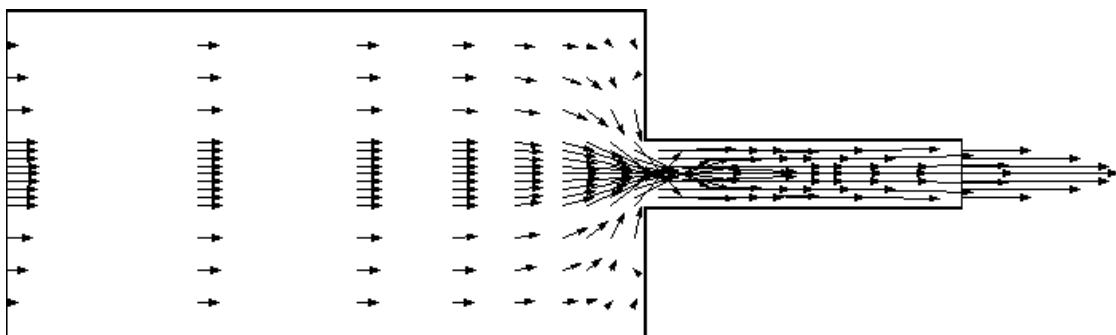


図 4.2 流速ベクトル図 ( $Re=1.0, \Delta t=0.0001, t=0.002$ )

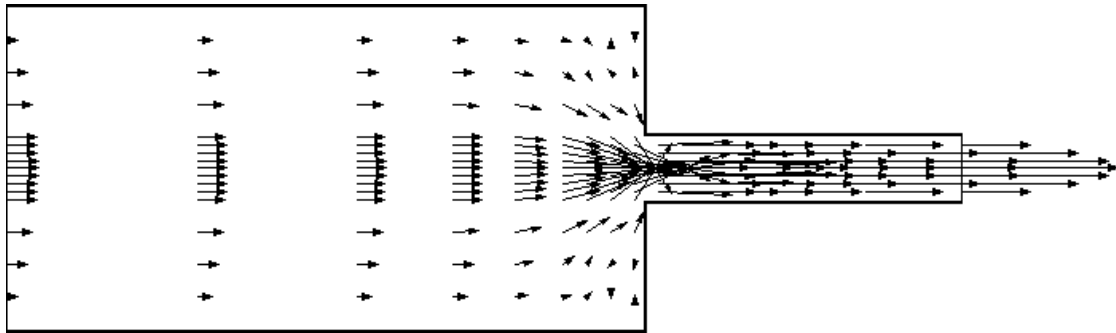


図 4.3 流速ベクトル図 ( $Re=1.0, \Delta t=0.0001, t=0.02$ )

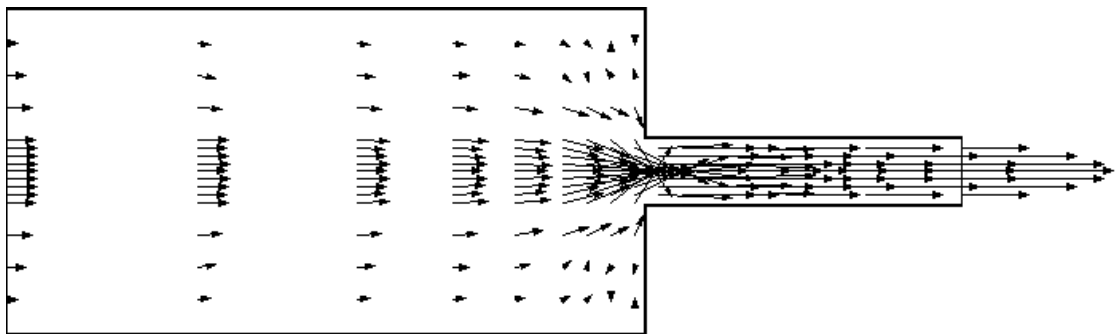


図 4.4 流速ベクトル図 ( $Re=1.0, \Delta t=0.0001, t=0.4765$ ) 定常

$t=0.002$  に急縮小部上流側の上下両部分の壁面近くのベクトル方向が変化し始め、  
 $t=0.02$  にはそこに渦が完全に発生し、そこでの流れの変化がこれ以降はなくなった。その  
 後、 $t=0.4765$  になると解析領域全体の流れの変化がなくなり、定常に至った。

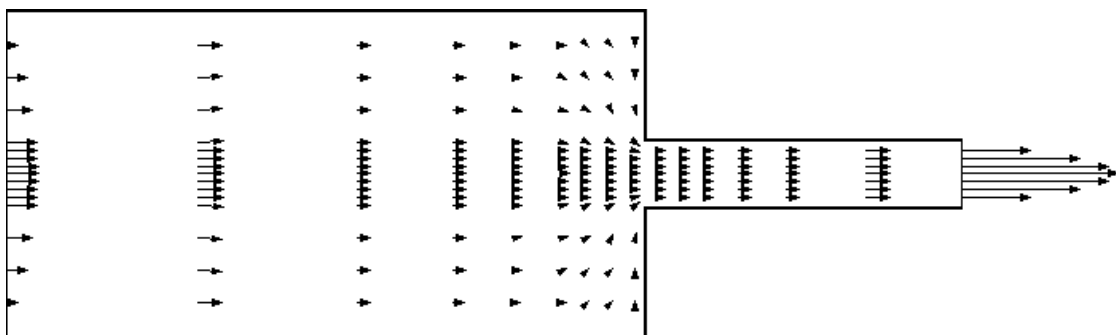


図 4.5 流速ベクトル図 ( $Re=1.0, \Delta t=0.0003, t=0.0003$ )

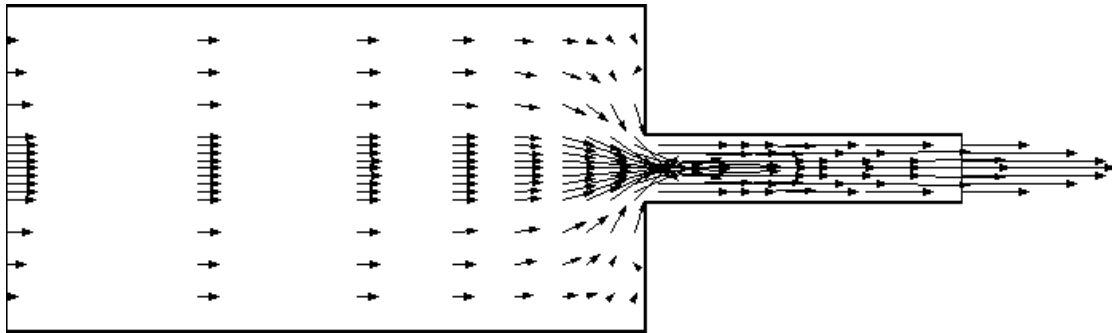


図 4.6 流速ベクトル図 ( $Re = 1.0, \Delta t = 0.0003, t = 0.0027$ )

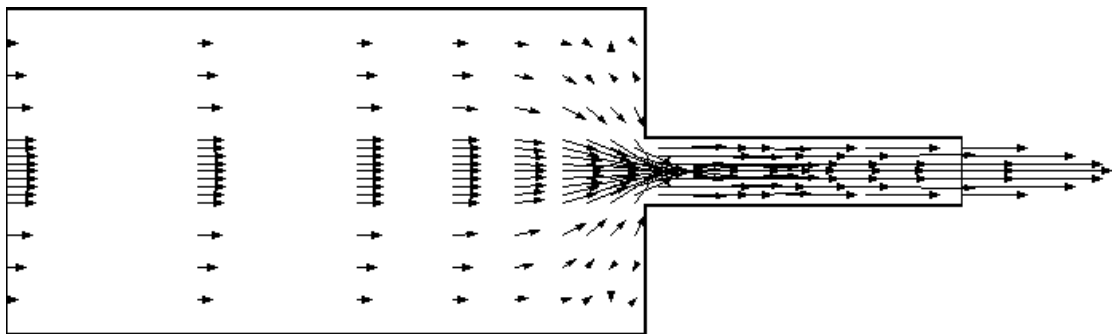


図 4.7 流速ベクトル図 ( $Re = 1.0, \Delta t = 0.0003, t = 0.015$ )

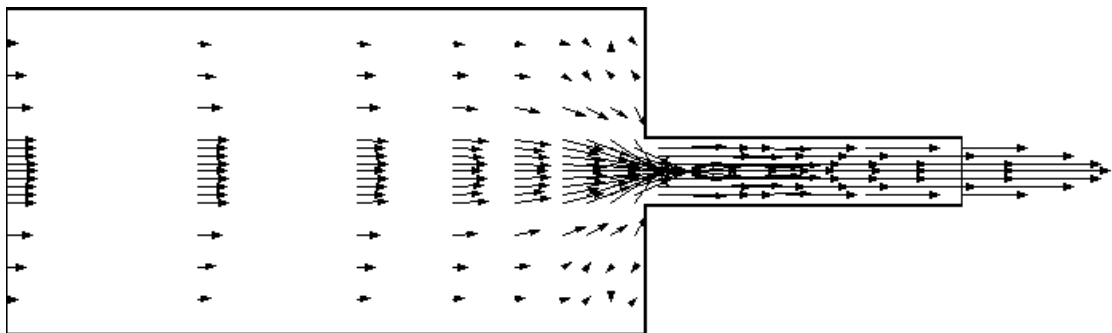


図 4.8 流速ベクトル図 ( $Re = 1.0, \Delta t = 0.0003, t = 0.7263$ ) 定常

$t = 0.0027$  に急縮小部上流側の上下两部分の壁面近くのベクトル方向が変化し始め、  
 $t = 0.015$  にはそこに渦が完全に発生し、そこでの流れの変化がこれ以降はなくなった。そ  
 の後、 $t = 0.7263$  になると解析領域全体の流れの変化がほとんどなくなり、定常に至った。

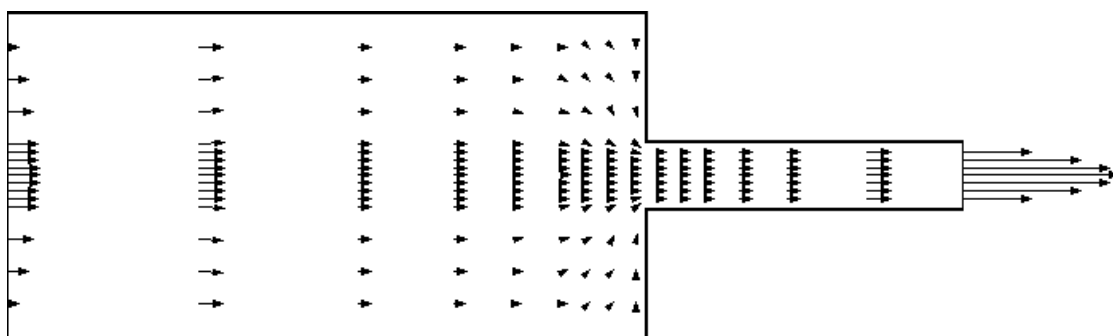


図 4.9 流速ベクトル図 ( $Re = 1.0, \Delta t = 0.0005, t = 0.0005$ )

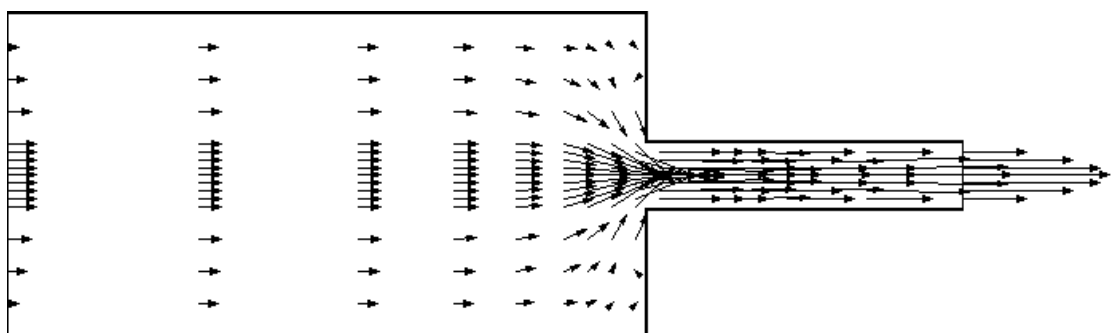


図 4.10 流速ベクトル図 ( $Re = 1.0, \Delta t = 0.0005, t = 0.004$ )

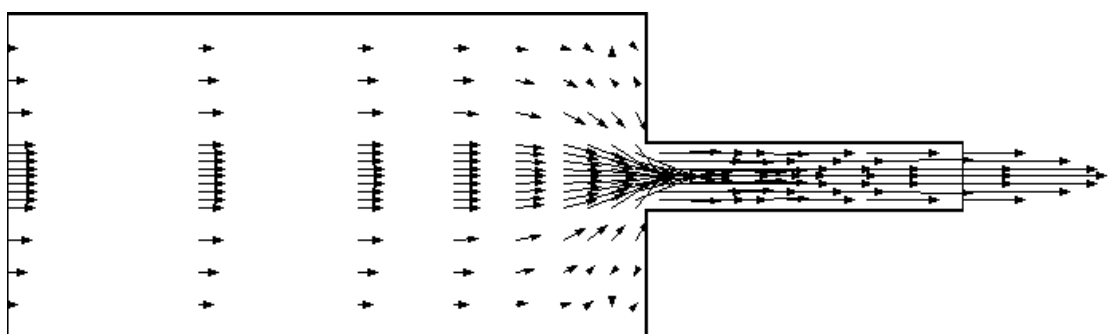


図 4.11 流速ベクトル図 ( $Re = 1.0, \Delta t = 0.0005, t = 0.015$ )

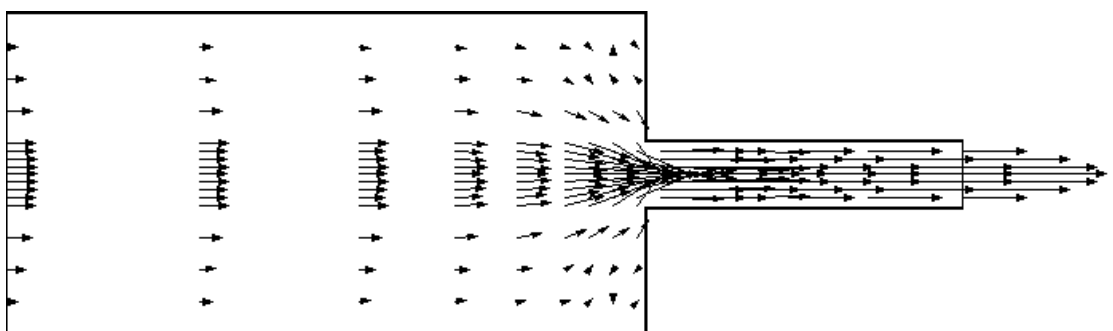


図 4.12 流速ベクトル図 ( $Re = 1.0, \Delta t = 0.0005, t = 0.849$ ) 定常

$t = 0.004$  に急縮小部上流側の上下両部分の壁面近くのベクトル方向が変化し始め、 $t = 0.015$  にはそこに渦が完全に発生し、そこでの流れの変化がこれ以降はなくなった。その後、 $t = 0.849$  になると解析領域全体の流れの変化がほとんどなくなり、定常に至った。

流速ベクトル図の流速は時間が進むにつれ下流側から上流側へと変化していき、変化するのも下流からだった。 $\Delta t$  が小さいほど急縮小部上流側の上下両部分の壁面近くのベクトル方向が変化し始める時間は早くなり、定常に至る時間も早かった。

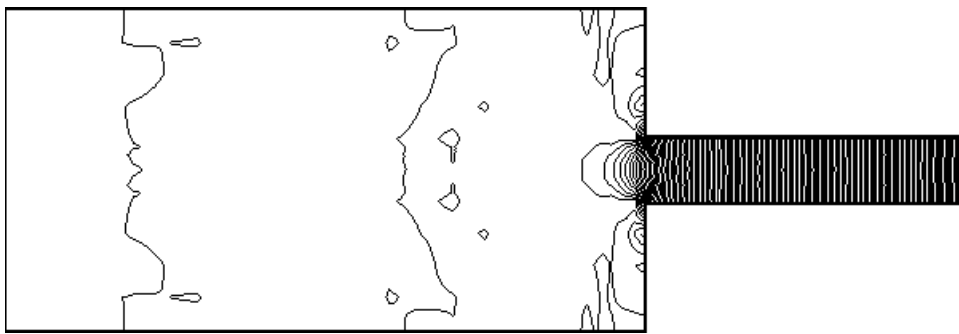


図 4.13 等圧線図 ( $Re = 1.0, \Delta t = 0.0001, t = 0.4765$ ) 定常

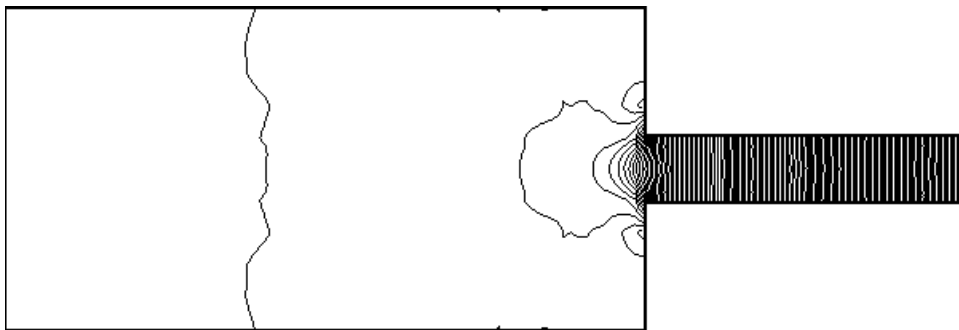


図 4.14 等圧線図 ( $Re = 1.0, \Delta t = 0.0003, t = 0.7263$ ) 定常



図 4.15 等圧線図 ( $Re = 1.0, \Delta t = 0.0005, t = 0.849$ ) 定常

どの場合の等圧力線図とも急縮小部上流側の上下両部分の壁面近くの圧力が周りに比べて高くなっている．これにより先に示した流速ベクトル図のように急縮小部上流側の上下両部分の壁面近くで下流へと流れていた流れがその圧力が高くなっているため、流れが逆になり渦が発生したと思われる．急縮小後の等圧線は急縮小前より間隔が密となっており、そのため急縮小後は急縮小前に比べ流速が速くなっている．

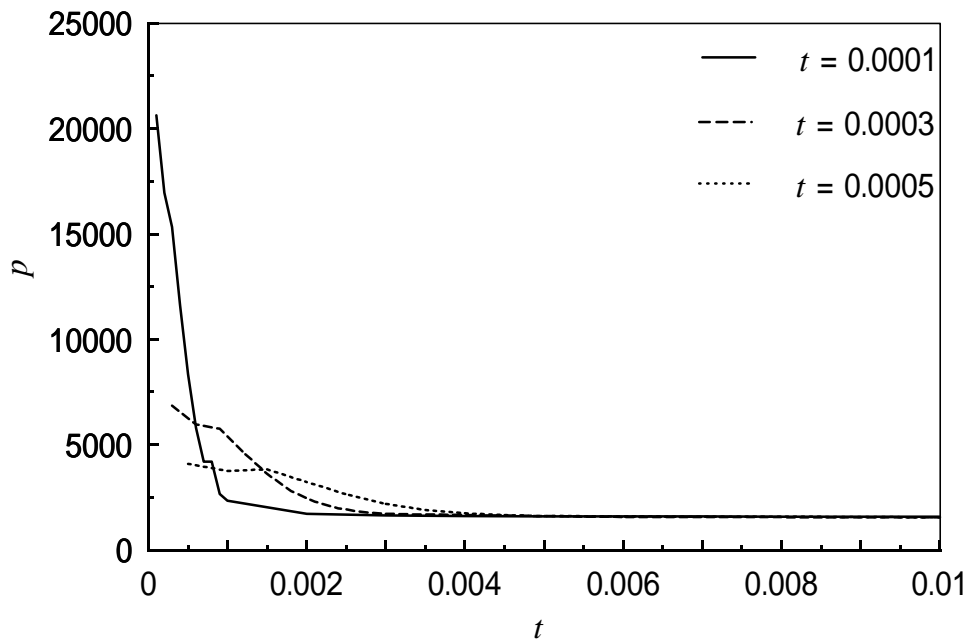


図 4.29 入口と出口の圧力差

$\Delta t$  が小さいほど最初は入口と出口の圧力差が大きいが、どの場合とも入口と出口の圧力差はほぼ等しい値となり、また  $\Delta t$  が小さいほどその値に早く収束している．上図 4.29 と図 4.1 ~ 4.12 の流速ベクトル図を見ると、急縮小部上流側の上下両の壁面近くのベクトルが変化し始める時間と同じ時間に入口と出口の圧力差がほぼ定常になっている．

## 第5章 結 論

本研究では，冒頭でも述べたように最終研究目標である血管内における血液流れの有限要素解析を行うために有限要素法を理解することを目的として，ニュートン流体の5対1急縮小流路流れの様子を三角形要素を用いて有限要素解析を行った．その結果をまとめると次のようになる．

- 急縮小部上流側の上下両部分の壁面近くの圧力が高くなるため，そこに渦が発生する．
- $\Delta t$  が小さいほど急縮小部上流側の上下両部分の壁面近くの流れが逆に変化し始める時間が早くなり，また解析領域全体の流れの変化がほとんどなくなり，定常に至る時間も早くなる．
- 入口と出口の圧力差が定常になる時間とほぼ同じ時間に急縮小部上流側の上下両部分の壁面近くの流れが逆に変化し始める．
- 今回は図 2.2 のようにメッシュを生成したが，その他にもいろいろなメッシュで計算した結果，急縮小部のメッシュをあまり粗くすると発散して計算できなかった．メッシュを細かくすると計算結果の精度は上がるが，ただ単にメッシュを細かくするだけでは計算時間が非常にかかる．そのため，流れなどの現象の変化が大きく急激な部分のみメッシュを細かくし，現象の変化が小さく穏やかな部分はメッシュを粗くすると計算時間もあまりかからず，計算結果の精度もよくなる．

以上のように，三角形要素を用いた流路流れの有限要素解析を行うことで，有限要素法について理解することができた．今後，有限要素法を用いて血液流れを解析するにあたって行うこととしては，構成方程式を血液の構成方程式に換えて有限要素方程式にして数値計算をする．また血管壁のモデル化やそれに最適なメッシュを生成をする必要がある．このようなことを考慮して今後も研究を行う．



### 参考文献

- (1)日本数値流体力学会有限要素研究委員会,有限要素法による流れのシミュレーション,シュプリンガー・フェアラーク東京(1998) .
- (2)川原睦人,有限要素法流体解析,日科技連出版社(1985) .
- (3)登坂宣好・大西和榮,偏微分方程式の数値シミュレーション,東京大学出版会(1991)
- (4)矢川元基・奥田洋司・中林靖,有限要素法流れ解析,朝倉書店(1998) .
- (5)矢川元基,流れと熱伝導の有限要素法入門,培風館(1983) .
- (6)日本機械学会,流れの数値シミュレーション,コロナ社(1988) .
- (7)棚橋隆彦,流れの有限要素解析,朝倉書店(1997) .
- (8)鷲津久一郎ら他 3 名,有限要素法ハンドブック 基礎編,培風館(1981) .
- (9)鷲津久一郎ら他 3 名,有限要素法ハンドブック 応用編,培風館(1983)
- (10)杉江日出澄ら他 3 名,FORTRAN77 による数値計算法,培風館(1986), 23 .

## 謝辞

本研究を遂行するにあたり，終始懇切丁寧な御指導を賜りました蝶野成臣教授，辻知宏助手に対し，深く感謝いたします．

また高知工科大学知能流体力学研究室の皆さんからは多大なるご援助いただき，あわせて感謝いたします．