

平成13年度

卒業論文

# 血液流動の有限要素解析

高知工科大学

知能機械システム工学科

知能流体力学研究室

撰 隆文

## 目次

### 第一章 緒言

1 - 1	研究をおこなう背景と目的	1
1 - 2	血液の循環	2
1 - 3	血液の粘度とキャッソンモデル	3
1 - 4	計算手法	3
1 - 5	要素分割の特徴	5

### 第二章 基礎方程式

2 - 1	主な記号	7
2 - 2	支配方程式	7
2 - 2 - 1	連続の式	7
2 - 2 - 2	コーシーの運動方程式	8
2 - 2 - 3	血液の構成方程式	8
2 - 3	計算条件	9
2 - 4	無次元化	9
2 - 5	要素分割	11
2 - 6	時間方向の離散化	11
2 - 7	流速修正法	12
2 - 8	重み付き残差法	13
2 - 9	プログラムの流れ	15
2 - 10	連立方程式の解法	15

### 第三章 計算結果と考察

3 - 1	ニュートン流体	16
3 - 2	キャッソン流体	20

### 第四章 結言

24

### 参考文献

25

### 謝辞

26

# 第一章 緒言

## 1 - 1 研究をおこなう背景と目的

ヒトの体内では動脈，毛細血管，静脈といった血管の内部を血液が絶えず循環していてその全長は数万キロに及んでいる．ヒトはこの血液流動を介して栄養を運んだり老廃物を体外に排出している．このように血液流動がヒトの生体機能において重要な役割を果たしている一方で，血液流動に関係した様々な疾患が存在することも知られている．

血管と血液には水や水道管と比べて様々な特徴がある．その主な特徴は，水とは違い非ニュートン流体であること．また血管は水道管のような剛体管ではなく，直径を変化させることができる粘弾性管であること，形状が複雑で分岐点が多いこと．さらには，血管内の流れは非定常であり，体内では心臓が絶えず動いている為，脈動流であること等が上げられる．そしてこれらの特徴が血管内の流れを複雑なものにしている．

血管内部では心筋梗塞などの原因になる動脈硬化や，くも膜下出血を引き起こす動脈瘤など様々な致命的疾患が起こっている．動脈硬化は血管の曲がり部，分岐部に限定して発生をし，脳動脈瘤もまた分岐部に多く起こる．曲がり部，分岐部というのは流れが複雑になる箇所であり，流体力学から見ても重要な部分であることから動脈硬化の発生には血液流動による影響が大きく作用していると考えられている．しかしながらその発生原因についての明快な結論というのは未だに解明されていないというのが現状である．そのような理由から，血管内の流れを詳しく調べることは非常に重要な意味を持っている．

しかし，血管内の流れを直接目で見ることは困難である．その主な理由として血管の形状が上で述べたように複雑であること，また箇所によっては数 $\mu$ メートルと非常に細いことが上げられる．この問題に対して今までの研究ではコンピューターによって血液流動をシミュレートするという方法で血液流動の特徴を調べてきた．しかし血管の粘弾性，複雑な形状，脈動流などを考慮したシミュレーションは多く存在するものの，血液のモデルとしてはニュートン流体を用いているものがほとんどであった．それは，現在市販されている解析ソフトでは非ニュートン流体の解析を行なうことが出来ないためである．

そこで本研究では非ニュートン流体にも対応した解析プログラムを作成した．さらに血液の流動を表すモデルであるキャッソンモデルを用いて血液流動の数値解析を行なった．

## 1 - 2 血液の循環

血液の循環は図 1 - 1 のように、心臓の左心室から大動脈、動脈を経て毛細血管を通り静脈、大静脈を経て右心房に戻る体循環と、右心房、右心室、肺動脈、肺、肺静脈を通り左心房に戻る肺循環からなる<sup>1)</sup>。

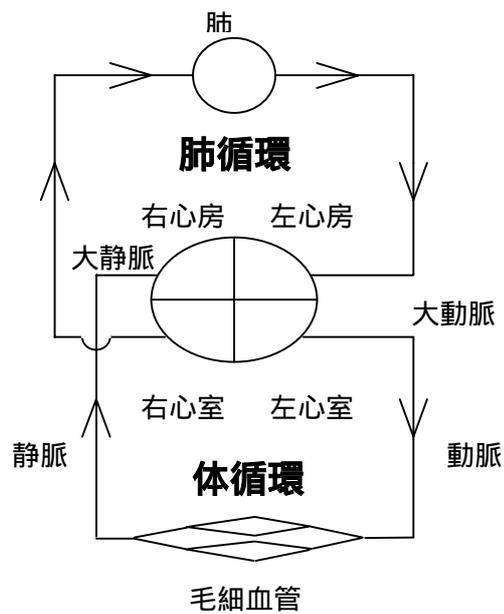


図 1 - 1 体内循環系

血管は大動脈から毛細血管に至るまで分岐しながら細くなっていき、毛細血管から大静脈へ合流しながら太くなっていくなど循環系内の各所で血管の直径が異なる。例えば、大動脈は直径 20 mm ~ 32 mm ,そして毛細血管は  $5 \times 10^{-4}$  mm ~  $1 \times 10^{-2}$  mm である。

### 1 - 3 血液の粘度とキャッソンモデル

血液は流体である血漿中に有形成分である赤血球，白血球，および血小板が分散しているサスペンションである．このような流体を流体力学的観点からとらえた場合，その性質は粘度によって表される．

血液は非ニュートン流体であり，せん断速度が増加するに従って見かけ粘度が減少するという性質を持つ．血液の粘度の変化は赤血球の影響が大きい．赤血球は低せん断速度のとき，連鎖という凝集体を形成することが知られていて，せん断速度が増し，その凝集体が破壊されることにより見かけ粘度が減少するものと考えられている．また血液が赤血球の直径よりも細い毛細血管を通過出来るのは，赤血球が形状を変化させることによるもので，赤血球の変形も見かけ粘度と関わっていると考えられている．

キャッソンの式は従来，塗料の流動から導かれた実験式であった．しかし，他のある特定の流体の流動がこの式に従う事が見出された．例えば，ヒトやウシの血液，そして融解したチョコレートの流動がこの式に従う．キャッソンの式が構成方程式である流れモデルはキャッソンモデルといい，血液を表すモデルとしてよく用いられている<sup>2)</sup>．

### 1 - 4 計算手法

本研究で用いた，血液流動を記述するための支配方程式は複雑な微分方程式である．この支配方程式を解析的に解くことは不可能であり，数値計算が唯一の手段である．ここでは本研究で用いた数値解法である有限要素法についてその原理と利点について紹介する．

有限要素法の原理の説明のため，次の微分方程式を考える．

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \dots \dots \dots (1 - 1)$$

ここで  $u$  は未知関数， $x$  は独立変数である．まず解析領域を図 1 - 2 のように有限個の区間に分割する．このとき区間と区間を区別する点を節点，分割された区間は要素という．次に式の近似関数を定義する．

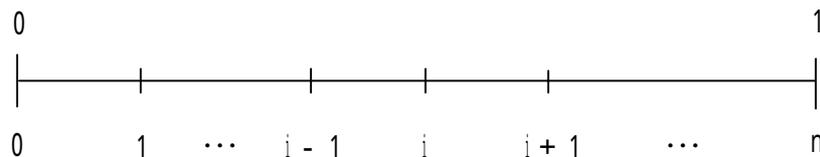


図 1 - 2 一次元領域の要素分割

領域内の各節点においてある微分方程式の近似解を求めるとき、近似解と厳密解の差である残差が発生する。この残差が小さいほど近似解はより良いといえる。しかし、領域内のあらゆる点で残差を0にすることはできない。そこで各節点の残差に任意の重み関数を掛け、その重み付き残差の領域全体の積分値が0になるならば十分な近似が行なわれた物と考える。この考えに基づいた近似関数を重み付き残差方程式といい重み関数  $u^*$  とすると

$$\int_0^l u^* \frac{du}{dx} dx = 0 \quad \dots \dots (1-2)$$

得られる式を重み付き残差方程式という。これが近似の基本となる方程式である。次に各要素での近似関数を定義する。

関数形を決定する際には、各要素を独立したものとして扱い、各要素ごとに近似関数を定義する。各要素の近似関数は節点値を元に直線で近似する。この作業を補間といい近似関数を要素補間関数という。図1-3のような長さ  $l$  の要素に着目し、節点値を満たすように要素補間関数を設定すると

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_a + \left(\frac{x}{l}\right) u_b \quad \dots \dots (1-3)$$

と定義される。式(1-3)の  $\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ 、 $\left(\frac{x}{l}\right)$  は形状関数と呼ばれる。

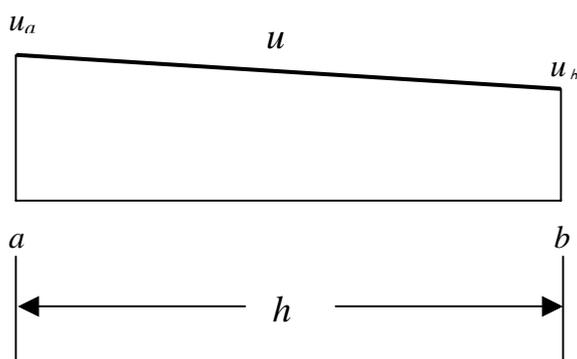


図1-3 要素補間関数

また，重み関数についても同様の近似関数を導入すると

$$u^* = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_a^* + \left(\frac{x}{l}\right)u_b^* \quad \dots\dots\dots(1-4)$$

を得る．次に式(1-3)，式(1-4)を式(1-2)に代入すると

$$\begin{aligned} & u_a^* \left\{ \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(-\frac{1}{l}\right) dx u_a + \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{1}{l}\right) dx u_b \right\} \\ & + u_b^* \left\{ \int_0^1 \left(\frac{x}{l}\right) \left(-\frac{1}{l}\right) dx u_a + \int_0^1 \left(\frac{x}{l}\right) \left(\frac{1}{l}\right) dx u_b \right\} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1-5)$$

式(1-5)を積分すると

$$u_a^* \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)u_a + \left(\frac{1}{2}\right)u_b \right\} + u_b^* \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)u_a + \left(\frac{1}{2}\right)u_b \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(1-6)$$

ここで重み関数を  $u_a^* = 1, u_b^* = 0$  とすると式(1-6)は次のようになる

$$N_a \equiv \left(-\frac{1}{2}\right)u_a + \left(\frac{1}{2}\right)u_b = 0 \quad \dots\dots\dots(1-7)$$

また  $u_a^* = 0, u_b^* = 1$  とすると，同様に

$$N_b \equiv \left(-\frac{1}{2}\right)u_a + \left(\frac{1}{2}\right)u_b = 0 \quad \dots\dots\dots(1-8)$$

という方程式を得ることが出来る．この式(1-8)の  $N_a, N_b$  は式(1-7)

式(1-8)がそれぞれ  $u_a^*, u_b^*$  によって求められたことを表す為に，方程式に置き替えた

ものである．式(1-7)，式(1-8)をまとめると

$$\begin{bmatrix} N_a \\ N_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(1-9)$$

を得る．

この式(1-9)は着目した要素内で、式(1-1)の性質を損なわないように節点の未知関数に関する量  $u_a, u_b$  で離散化した方程式系となっている。この式(1-9)を有限要素方程式という。この式を領域内の要素すべてで求め、領域全体で有限要素方程式を重ね合わせる事で、領域の支配方程式を単純な連立方程式に変換する。そして、連立方程式の数値計算法は多く存在するので比較的簡単に解くことができる。このように、微分方程式をまず要素ごとの近似方程式に置き換え、それを領域全体で重ね合わせることで支配方程式を近似した連立方程式に変換し解くというのが有限要素法の原理である。

有限要素法の利点は、要素分割に非構造格子を用いることができるという点にある。二次元の要素分割例を図1-4に示す。図を見ると要素の形状が一種類ではなく境界付近で様々な形状の要素があり、解析領域を良く分割している事がわかる。こうすることで解析領域を精度良く近似することが出来る。また要素補間関数の性質から、要素分割が細かければ精度は向上する。このような性質から有限要素法は複雑な領域を数値計算するのに最も適した方法である。

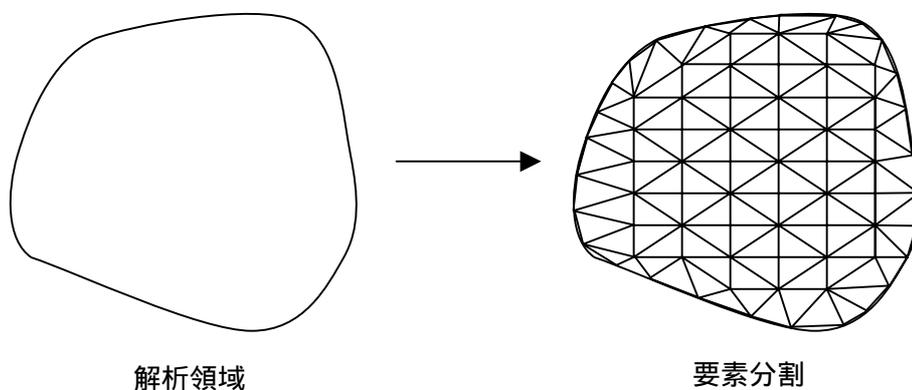


図1-2 要素分割例

## 第二章 基礎方程式

### 2 - 1 主な記号

$e_{ij}$	:	変形速度テンソルの ( $i, j$ ) 成分
$L$	:	代表長さ
$P$	:	圧力
$P_y$	:	降伏応力
$t$	:	時間
$U$	:	代表速度
	:	粘度
	:	密度
		$e_{ij} e_{ji}$
$\sigma_{ij}$	:	偏差応力テンソル

添字

\* : 有次元量をあらわす

### 2 - 2 支配方程式

本研究で用いられている支配方程式は連続の式，コーシーの運動方程式および，キャットソン流体の構成方程式である．式の表記法として総和規約を用いている．また，添字  $i, j$  は 1, 2 の範囲を持つ．

#### 2 - 2 - 1 連続の式

連続の式は質量保存の式で流体が非圧縮の場合

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad \dots \dots (2 - 1)$$

で表される．ここで  $x_i$  は座標成分であり ( $x_1 = x, x_2 = y$ )， $u_i$  は速度の  $x_i$  成分である．

### 2 - 2 - 2 コーシーの運動方程式

コーシーの運動方程式は単に運動方程式とも呼ばれ，外部から領域に作用する力がない場合

$$\rho \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \right) = - \frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial \sigma_{ji}^*}{\partial x_j^*} \quad \dots \dots \dots (2 - 2)$$

と表される．

### 2 - 3 - 3 血液の構成方程式

キャツソンの式は血液の構成方程式としてよく用いられる式で

$$\sigma_{ij}^* = \tau_{ij}^* + 2\eta_\infty e_{ij}^* \quad \dots \dots \dots (2 - 3)$$

$$e_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) \quad \dots \dots \dots (2 - 3 - 1)$$

ここで右辺第 1 項はキャツソン流体の非ニュートン性を表している項で

$$\tau_{ij}^* = \left( P_y^* \frac{1}{\sqrt{4}^*} - 2\sqrt{P_y^* \eta_\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{4}^*} \right) 2e_{ij}^* \quad \dots \dots \dots (2 - 3 - 2)$$

$$^* = e_{ij}^* e_{ji}^* \quad \dots \dots \dots (2 - 3 - 3)$$

である．また式 (2 - 3) から  $\tau_{ij}^*$  を除くと，ニュートン流体の構成方程式となる．

### 2 - 3 計算条件

本研究では血液の平板間流れの数値解析を行なう．なお，平板間距離は動脈の直径に近い値を取り，幅 2 mm に設定した（図 2 - 1）．

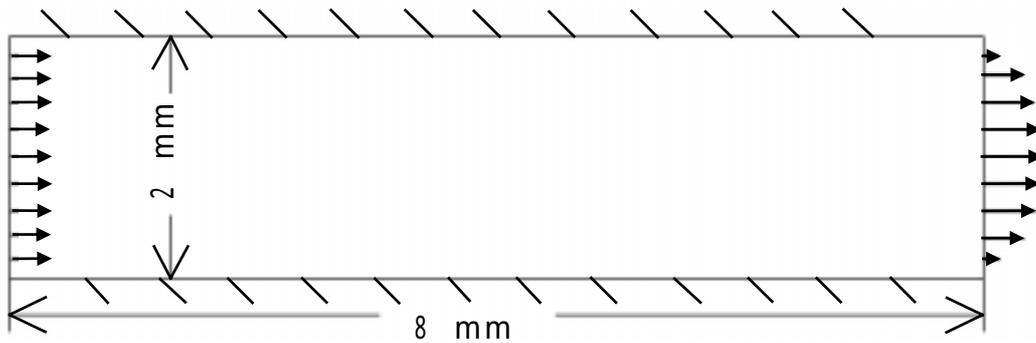


図 2 - 1 解析領域

今回の解析における境界条件は壁面上で滑りなし条件，入口で 1 mm/s の一様な流れまた出口では  $x$  方向に自由流出条件， $y$  方向に 0 mm/s を与え，図のように流れが発達する様子を数値解析する．

各物性値は

$$\eta_{\infty} = 4.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$$

$$P_y = 1.0 \times 10^{-2} \text{ Pa}$$

とし，血液に近い値に設定した<sup>3)</sup>．

代表長さは平板間距離，代表速度は流路入口の速度で

$$L = 2.0 \text{ mm}$$

$$U = 1.0 \text{ mm/s}$$

である．

## 2 - 4 無次元化

各支配方程式に対して以下のように無次元化を行なう。なお代表長さ  $L$  には流路入り口の幅そして代表速度  $U$  には入口の平均速度を用いた。また、\* は有次元量を表している。各値を以下のように無次元化する

$$u_i^* = U u_i \quad \dots \dots \dots (2 - 4 - 1)$$

$$x_i^* = L x_i \quad \dots \dots \dots (2 - 4 - 2)$$

$$P_y^* = \eta_\infty \frac{U}{L} P_y \quad \dots \dots \dots (2 -$$

4 - 3)

$$P^* = \rho U^2 P \quad \dots \dots \dots (2 - 4 - 4)$$

式 (2 - 4 - 1), (2 - 4 - 2), (2 - 4 - 3) を用いると

$$e_{ij}^* = \frac{U}{L} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{U}{L} e_{ij} \quad \dots \dots \dots (2$$

- 5)

$$2^* = \frac{L^2}{U^2} e_{ij} e_{ji} = \frac{L^2}{U^2} 2 \quad \dots \dots \dots (2 - 6)$$

式 (2 - 4 - 1) から式 (2 - 6) までを式 (2 - 3 - 2) に代入する

$$\tau_{ij}^* = \left( \eta_\infty P_y \frac{1}{\sqrt{4}} - 2\eta_\infty \sqrt{P_y} \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \right) 2 \frac{U}{L} e_{ij} = \eta_\infty \frac{U}{L} \tau_{ij} \quad \dots \dots \dots (2 - 7)$$

式 (2 - 3) に式 (2 - 7) を代入すると

$$\sigma_{ij}^* = \eta_\infty \frac{U}{L} \tau_{ij} + 2\eta_\infty \frac{U}{L} e_{ij} = \eta_\infty \frac{U}{L} \sigma_{ij} \quad \dots \dots \dots (2 - 8 - 1)$$

同様に、血液をニュートン流体とみなした場合には

$$\sigma_{ij}^* = 2\eta_\infty \frac{U}{L} e_{ij} = \eta_\infty \frac{U}{L} \sigma_{ij} \quad \dots \dots \dots (2 - 8 - 2)$$

つぎに式 (2 - 2) に式 (2 - 4 - 1), (2 - 4 - 2), (2 - 4 - 4), (2 - 8) を代入すると

$$\rho \frac{U^2}{L} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{U^2}{L} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\rho \frac{U^2}{L} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta_\infty \frac{U}{L^2} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \dots \dots \dots (2-9)$$

両辺を  $\rho \frac{U^2}{L}$  で割ると

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \dots \dots \dots (2-10)$$

が得られる．ここで  $Re$  は無次元パラメーターとしてよく知られているレイノルズ数で

$$Re = \frac{\rho LU}{\eta_\infty}$$

である．なお式(2-3-2)の2 がゼロの極限で  $\tau_{ij}$  は無限大となる．これは見かけ粘度が無限大になることを表している．しかし実際の血液の見かけ粘度は有限でありこれは明らかに矛盾をしている．そこで、2 に対して下限  $2_0$  を設け  $2 < 2_0$  のとき  $= 2_0$  という近似条件を加えた．

## 2 - 5 要素分割

解析領域を次のように要素分割した．なお，入口付近と平板付近の流速では変化が激しいことが予想されるため要素分割を細かくした．

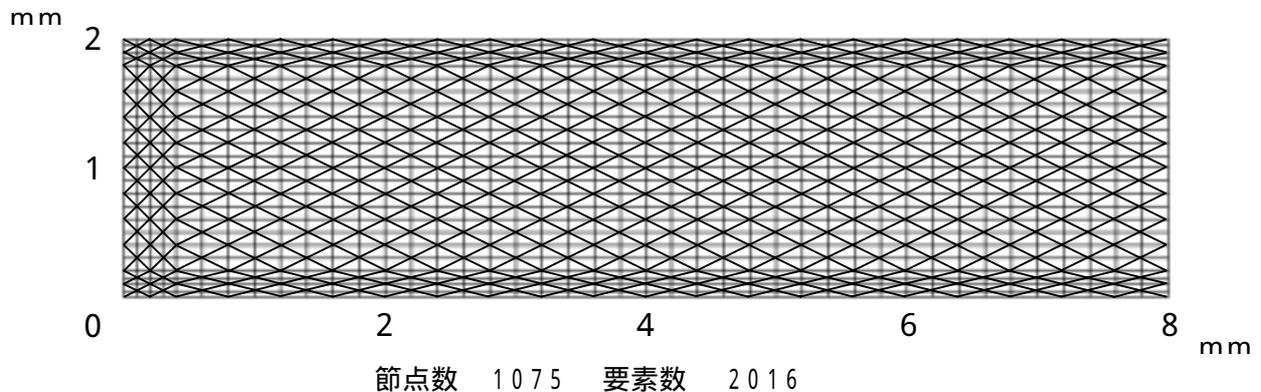


図 2 - 2 要素分割

## 2 - 6 時間方向の離散化

本研究ではコーシーの運動方程式 (式 (2 - 8)) に対して時間方向の離散化を以下のように行なった .

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} = - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad \dots \dots (2 - 11)$$

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad \dots \dots (2 - 12)$$

ここで,  $n$  は時間ステップ回数を表している .

## 2 - 7 流速修正法

時間進行法として流速修正法を用いた . 流速修正法は流速の予測子として中間流速を設定することで流れ場の変数である圧力と速度を分離して解く方法である<sup>4)</sup> . この手法は圧力と速度に同次の補間関数が使用でき, そのため, 重み付き残差法等の有限要素法の作業が容易になり, またプログラムを比較的簡単に作成できるのが特徴である .

まず中間流速を以下のように定義する .

$$\tilde{u}_i = u_i^n - \Delta t \left( u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{\eta_\infty}{\rho UL} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) \quad \dots \dots (2 - 13)$$

また式 (2 - 11) の両辺の発散を取り  $P$  についてまとめると

$$\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t} \left( - \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) \quad \dots \dots (2 - 14)$$

式(2-12)を代入すると圧力のPoisson方程式を得る

$$\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{\eta_\infty}{\rho LU} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \dots \dots \dots (2-14)$$

次に,式(2-11)から式(2-13)を引くことで次の速度  $u_i^{n+1}$  に関する式

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \Delta t \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} \dots \dots \dots (2-15)$$

を得る.

## 2-8 重み付き残差法

式(3-1),式(3-2),式(3-3)および式(3-4)に対する重み付き残差方程式を導くと以下のようになる.重み関数は  $(x, y)$  の関数で  $o, v, p$  を用い基本境界条件の与えられている境界上では0とする.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} o \sigma_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} o \sigma_{c,ij} d\Omega + 2\eta_\infty \int_{\Omega} o e_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} o \left( P_y \frac{1}{\sqrt{4}} + 2 \sqrt{P_y \eta_\infty} \frac{1}{\sqrt{4}} \right) 2 e_{ij} d\Omega + 2\eta_\infty \int_{\Omega} o e_{ij} d\Omega \end{aligned} \dots \dots \dots (2-16)$$

$$\int_{\Omega} v \tilde{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} v u_i^n d\Omega - \Delta t \left( \int_{\Omega} v u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} d\Omega - \frac{\eta_\infty}{\rho UL} \int_{\Omega} v \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} d\Omega \right) \dots \dots \dots (2-17)$$

$$\int_{\Omega} p \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} d\Omega \quad \dots\dots\dots(2-18)$$

$$\int_{\Omega} v u_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} v \tilde{u}_i d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \dots\dots\dots(2-19)$$

ここで, Gauss・Greenの定理

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g d\Omega = \int_{\partial\Omega} f g n_i d\Gamma - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} d\Omega$$

を式(3-15)の右辺第三項および式(3-16)の左辺に適応すると

$$\int_{\Omega} v \tilde{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} v u_i^n d\Omega - \Delta t \left( \int_{\Omega} v u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\partial\Omega} v \sigma_{ji} n_j d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} v \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} d\Omega \right) \quad \dots\dots\dots(2-20)$$

$$\int_{\partial\Omega} p \frac{\partial P}{\partial x_i} n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} d\Omega \quad \dots\dots\dots(2-21)$$

ここで  $\sigma_{ij} n_j$  は自由流出条件の場合 0,  $\frac{\partial P}{\partial x_i} n_i$  は法線方向の流出がない場合 0 として

それぞれ自然境界条件として用いられる. 以上の手順で得られた式を有限要素方程式に変換することで微分方程式から連立方程式へ式を変換することが出来る.

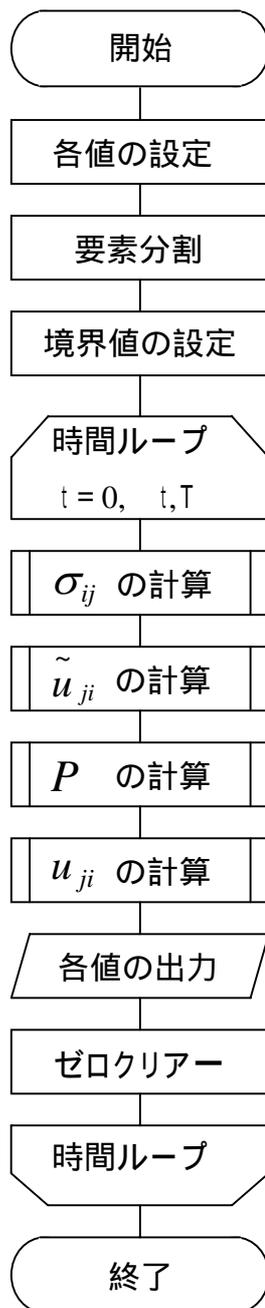


図 2 - 3 フローチャート

## 2 - 9 プログラムの流れ

次に、本研究で作成したプログラムの流れを図 2 - 3 に示す。従来のソフトではコーシーの運動方程式にニュートン流体の構成方程式を代入した式、つまりナビエ - ストークス方程式について数値解析を行なっていたため非ニュートン流体の数値解析を行なうには上で記述した重み付き残差法など、有限要素法の手順を最初から行なう必要があった。そこで、このプログラムでは偏差応力テンソルをコーシーの運動方程式と連立させて数値解析を行なっている。こうすることで流体が変わった場合には偏差応力テンソルの部分のみを考慮すれば非ニュートン流体についても数値解析が行なえるような構造にした。これがこのプログラムの特徴である。

## 2 - 10 連立方程式の解法

本研究では節点数 1075 の領域に対して有限要素解析を行なった。そのため有限要素法の各処理を行なって導かれた近似式は多次連立一次方程式になる。また発達流れを観察するには何千回もの繰り返し計算を行なう。そのために出来るだけ早く方程式の解を得る数値解法が必要になった。そのような理由から、本研究では連立一次方程式の反復解法の一つである共役勾配法を用いて計算をおこなった。この結果、有名な直接解法の一つであるガウス - ジョルダン法では約三分かかっていた計算が約二十秒に短縮された。

## 第三章 計算結果と考察

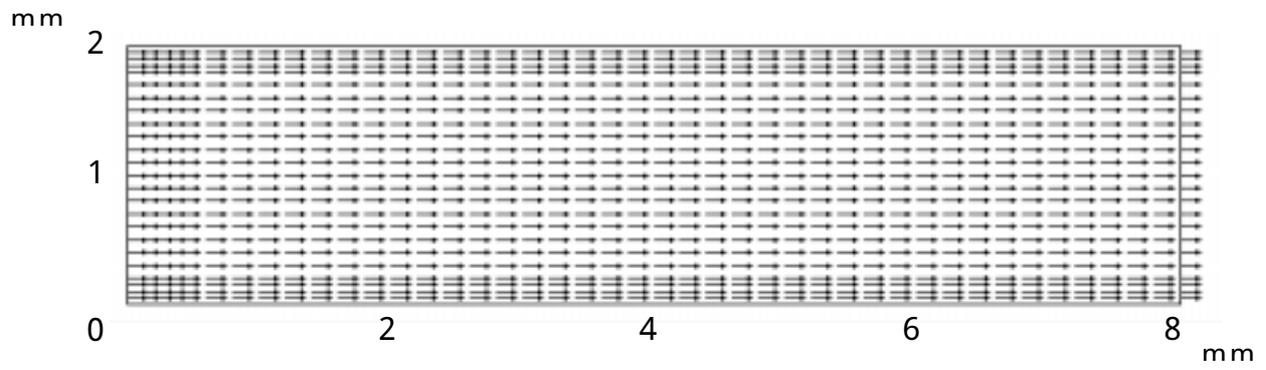
### 3 - 2 ニュートン流体

血液との比較の為にニュートン流体の入口流れについて計算を行なった。まず流れの発達の様子を図3 - 1に示す。  $t = 0$  sから、流れは時間が進むにつれて変化する非定常流だが、次第に流れは変化しなくなり  $t = 0.12$  sでほとんど流れが時間に依存しなくなり定常に至った。またそのとき、 $x = 4$  mm付近で流れは完全に発達した流れになった。

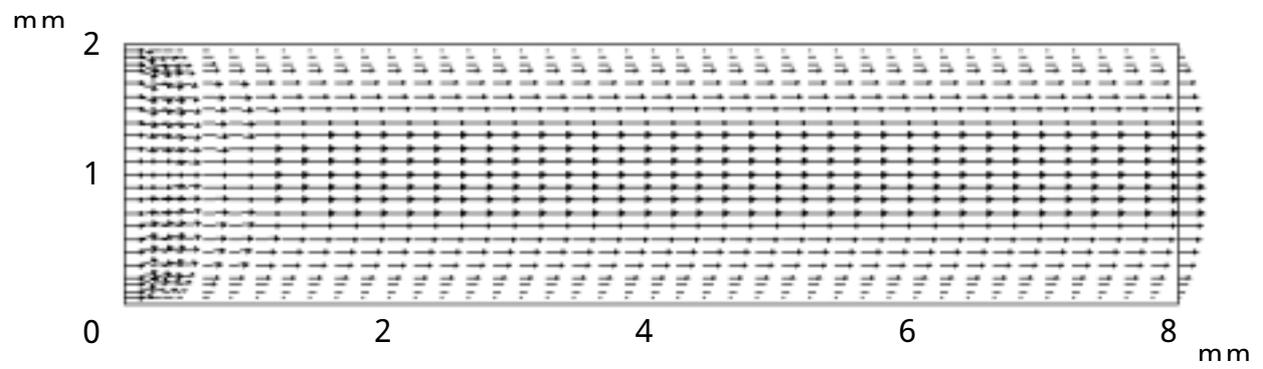
次に、 $x = 8$  mmでの近似解と厳密解の速度分布を図3 - 2に示す。ニュートン流体の場合、平板間での完全に発達した流れの速度分布は放物面で与えられるポアズイユ流れであることが知られていて、厳密解を解析的に求めることが出来る。点線がニュートン流体の平板間での完全に発達した流れの厳密解で、縦軸は速度、横軸は平板間の距離である。図を見ると、近似解は厳密解とほとんど同じ値でポアズイユ流れを示しているが、流量が少ないように見える。これは、流れが連続の条件を満たしていない可能性がある事を示すが、この場合は近似解と厳密解の差は厳密解の約2.5%と微小なので計算の誤差によるものだと考えられる。

次に図3 - 3にせん断応力とせん断速度の関係を示す。ニュートン流体では粘度がせん断速度に依存しない定数であるので、せん断応力とせん断速度の関係は直線的に与えられる。そして図のように、今回の計算で得られた近似解もせん断応力とせん断速度はせん断速度が0 ~ 0.5 1/s 付近で多少の誤差が確認されたものの、その関係はほぼ直線で与えられていて、厳密解を精度良く近似できている事がわかる。

これらの結果からこのプログラムはニュートン流体についての計算を精度良く行なうことが出来る事が確認された。

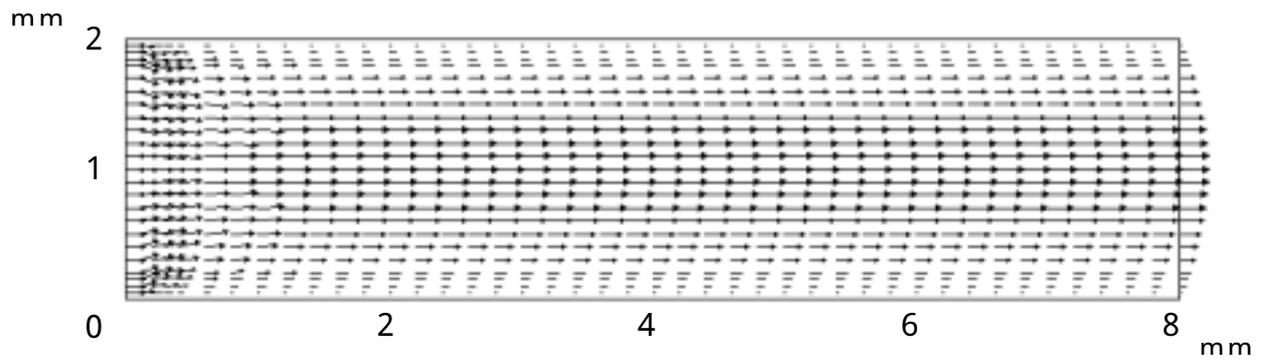


( a )  $t=0\text{ s}$

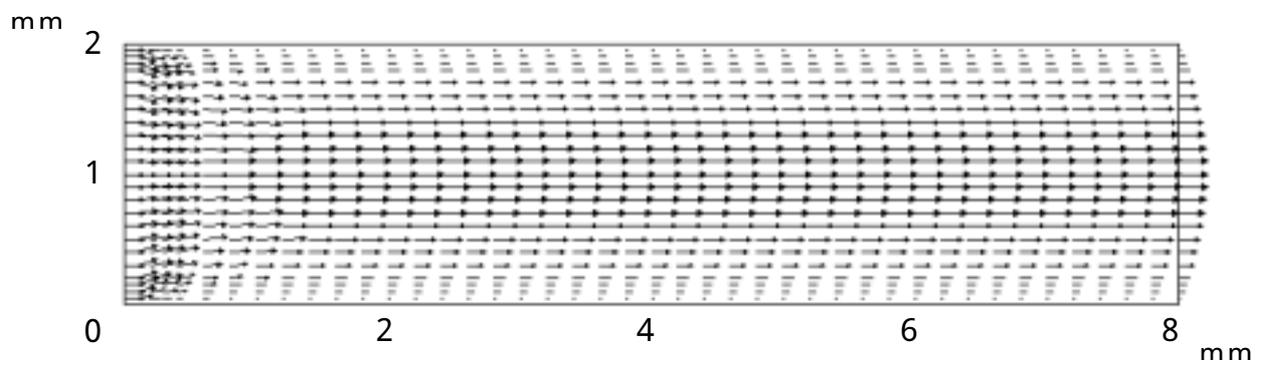


( b )  $t=0.04\text{ s}$

図3 - 1 - A 流れの発達の様子



( c )  $t = 0.08 \text{ s}$



( d )  $t = 0.12 \text{ s}$

図 3 - 1 - B 流れの発達の様子

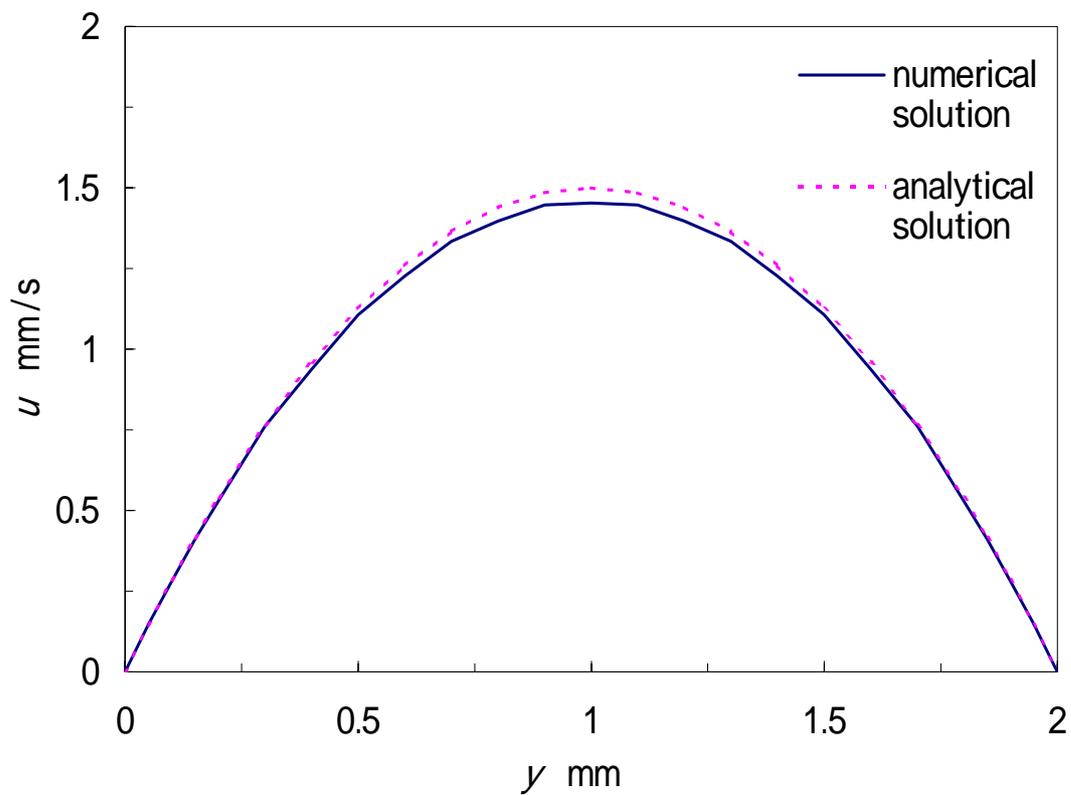


図 3 - 2 速度分布

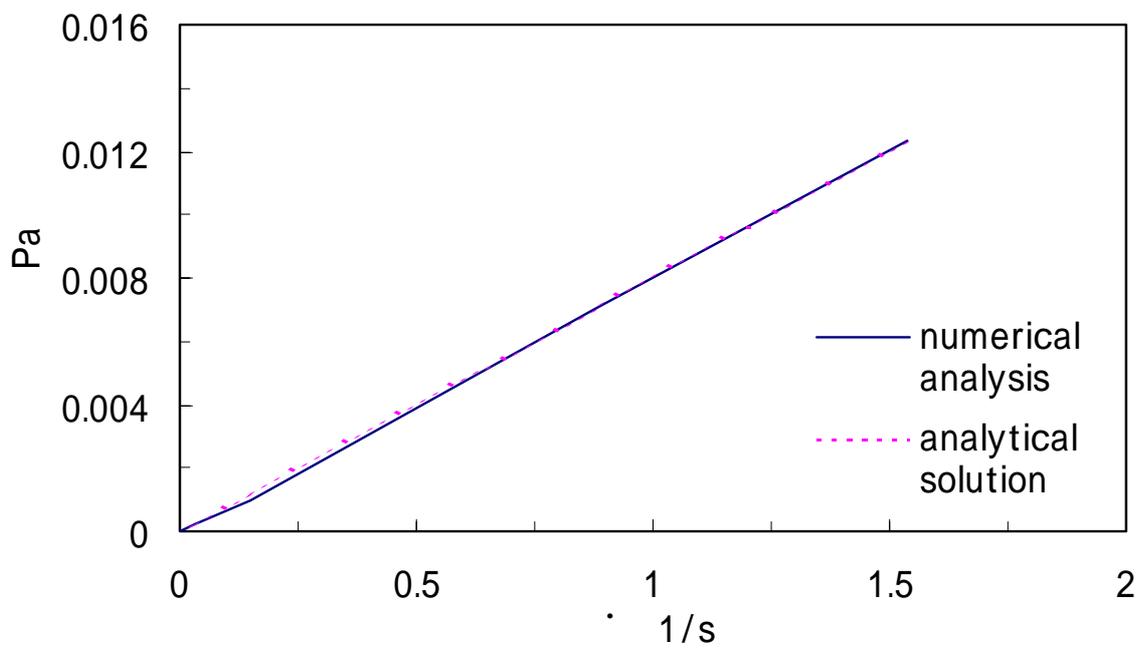


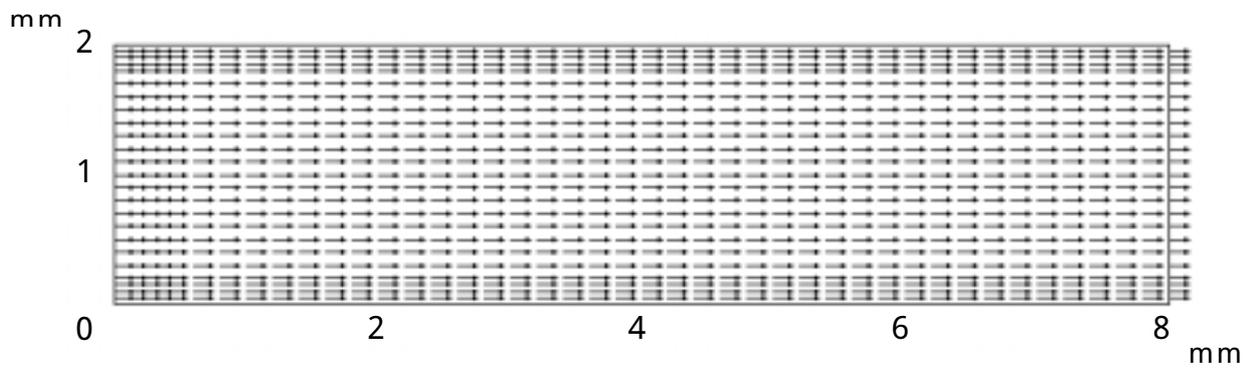
図 3 - 3  $\tau$ と $\dot{\gamma}$ の関係

### 3 - 3 キャッソン流体

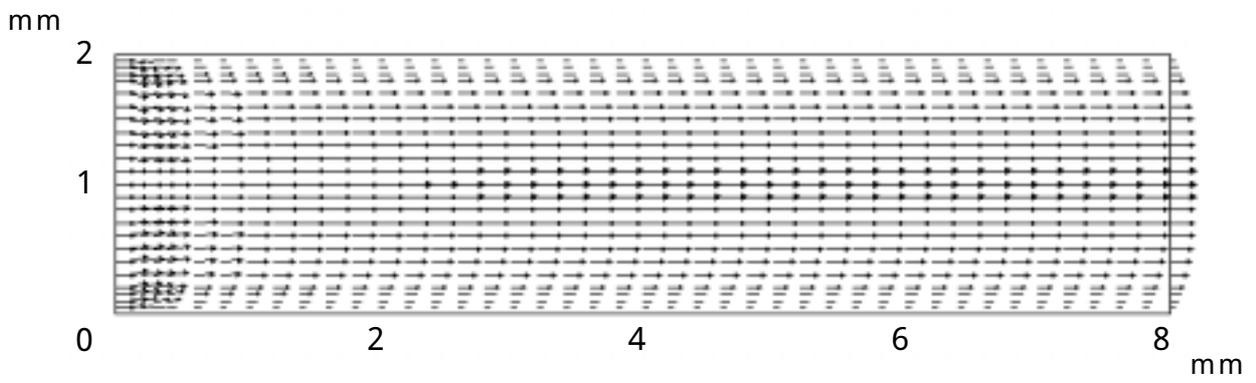
次に血液の流動を表すキャッソン流体の入口流れについての数値解析を行なった。このプログラムは  $\tau_{ij}$  の発散を防ぐために  $2 > 2_0$  という近似条件を付け加えている。そこで  $2_0$  の値を変化させる事で解がどのように変化するかを調べた。その結果  $2_0 = 0.01$  のときは  $2_0 = 0.1$  のときと比べて出口より少し手前の流れは中心付近で一様に近い流れを示した。これは  $2$  の値というのは  $0$  に近いほうが厳密解をより精度良く近似できることを示している。しかし  $2_0 = 0.01$  の場合、出口では流れが発散してしまった。この問題を解決することは今後の課題である。そのため、これ以後の考察は  $2_0 = 0.1$  での流れについてのものである。

まず、ニュートン流体と同じく時間ごとの速度の変化を図 3 - 4 に示す。血液の場合、流れは時間とともに変化しているが次第に流れの変化が減少していき、そして流れは  $0.06$  秒で時間的にほぼ変化しなくなり定常に至った。そして、そのときの流れは  $x = 4$  mm 付近で発達しなくなり完全に発達した流れになった。

次に、 $x = 0.8$  mm での完全に発達した流れの速度分布を図 3 - 5 に示す。この図で点線はニュートン流体の完全に発達した流れである。血液の速度分布は、放物線であるもののニュートン流体のポアズイユ流れと比べると平板間中心付近の速度が一様に近くなっている。この結果は、明らかにニュートン流体とは違う流れである。しかし流れがまだ放物面であることを考えると平板間中心の流れが一様であるキャッソン流体の流れとはまだ差が大きいように思われる。また、流量はニュートン流体のときと同じように厳密解の約  $2.5\%$  の誤差が生じた。



(a)  $t = 0 \text{ s}$



(b)  $t = 0.02 \text{ s}$

図 3 - 4 - A 流れの発達の様子

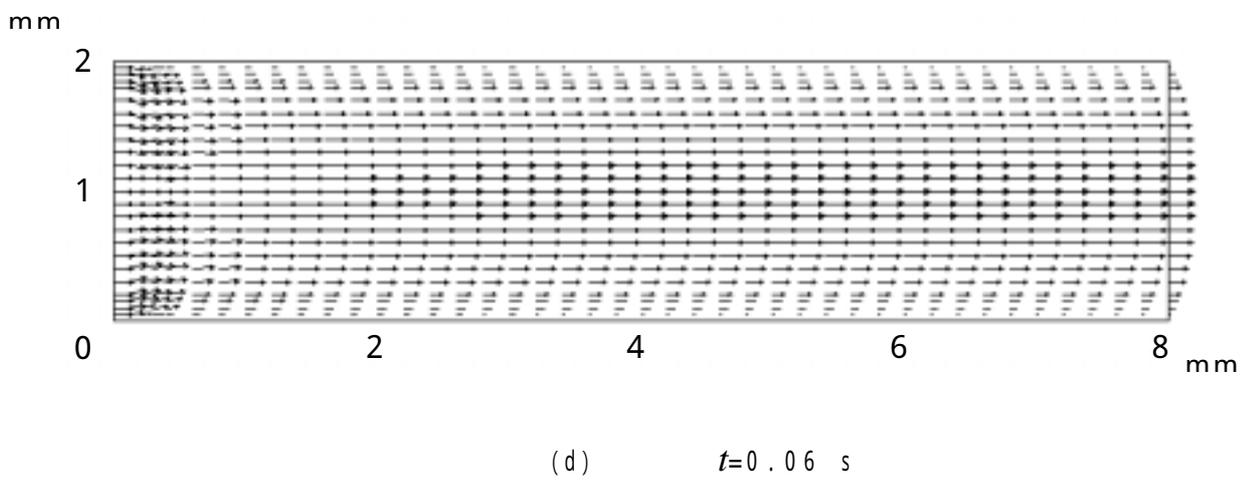
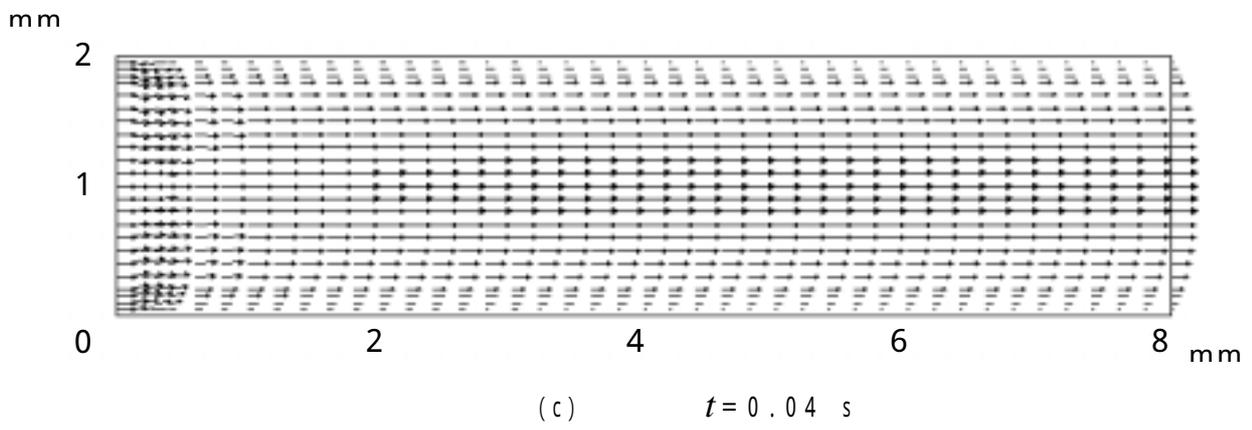


図 3 - 4 - b 流れの発達の様子

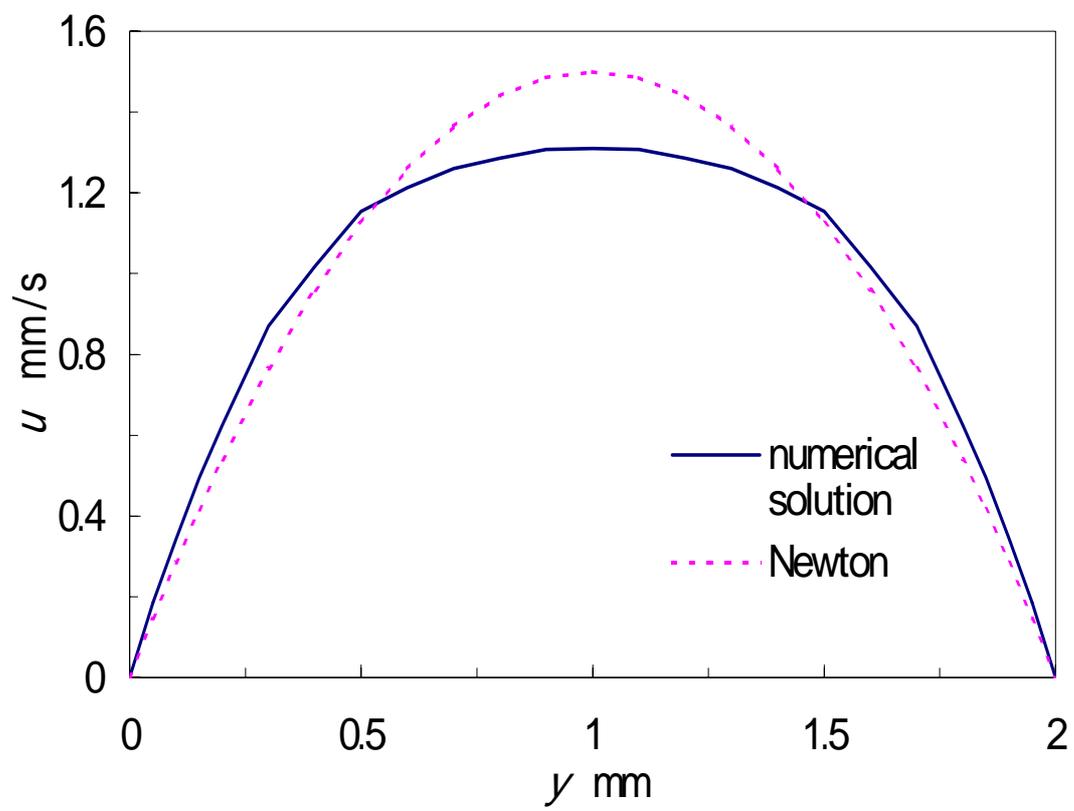


图 3 - 5 速度分布

## 第四章 結言

本研究ではまず、コーシーの運動方程式と流体の構成方程式を連立させるという方法で非ニュートン流体にも対応した有限要素法による流れの数値解析プログラムの作成を行なった。そして、そのプログラムを用いてまずニュートン流体の流れの数値解析を次に血液流動の数値解析を行なった。そして以下のような結果が得られた。

ニュートン流体についての数値解析は、流量に多少の誤差が生じたものの精度の良い近似を行えることが確認出来た。

血液流動の数値解析は、 $2 \quad \theta = 0.01$ の時は $2 \quad \theta = 0.1$ の時に比べ平板間中心付近の流れは一様流に近づいた。その一方で、解が発散してしまうという問題が発生した。そこで、平板間中心付近がニュートン流体に比べ一様に近い流れを示した。この傾向は血液流動の性質と一致する。しかし、速度分布はまだ放物面である。そのため、まだ計算の誤差は大きいと考えられる。

以上の結果から、このプログラムはニュートン流体の計算については問題なく行なえること、そしてキャッソン流体の計算は血液の性質と同じ傾向は示したものの、厳密解との差が大きい為、実用的な計算はまだ行なう事が出来ないことがわかった。そこで、計算誤差の原因を調べ、さらに精度の良いプログラムの作成を行なう必要がある。また、より解析結果を実際の血液流動に近づけるためには、解析領域は二次元ではなく三次元の円管を用いる必要がある。このように領域を三次元に拡張するのも今後の課題である。そして最終的には解析領域に様々な疾患の起こる分岐部や曲がり部など実際の血管の形状を与えて計算を行ない、血液の流動が血管に与える影響を調べ、疾患の発生原因を究明する。

## 参考文献

- 1 清水優史ら, バイオエンジニアリング, (1992), 培風館
- 2 岡小天, バイオレオロジー, (1984), 掌華房.
- 3 中村雅英, 小塚賢裕・石塚正幸, 血液の粘弾性が壁面せん断応力に及ぼす影響  
(2001) 機械学会論文集
- 4 川原睦人ら, 有限要素法による流れの数値シミュレーション (1998)  
シュプリンガー・フェアラーク東京.

## 謝辞

本研究を行なうにあたって，終始懇切丁寧な御指導いただいた蝶野正臣教授ならびに辻知宏助手に深く御礼申し上げます．また知能流体力学研究室の皆様にも多大な御援助を頂きました．重ねて御礼申し上げます．