

平成 13 年度

卒業論文

## ゴルフスイングの動力学とメカニズムの検討

指導教員

井上 喜雄 教授

甲斐 義弘 助手

高知工科大学工学部 知能機械システム工学科

1020097 岡山 幸一

## 目次

1章 緒言.....	1
2章 目的.....	2
3章 モデリング.....	3
4章 運動方程式.....	4
5章 アンコック.....	6
6章 各種パラメータ変化によるスイングへの影響.....	10
7章 結言.....	13
謝辞.....	14
参考文献.....	14

付録

## 1章 緒言

近年，老若男女を問わず，スポーツがさかんであるが，その中でもゴルフは誰もが楽しめ，長く続けることのできる人気の高いスポーツである．身長などもあまりハンデにはならず，それに合った攻め方を考えることができるのもゴルフの魅力の一つである．同時に，一見単純そうに見えるゴルフも実際はコースに応じた緻密な戦略を立てる必要があり，奥の深いゲームをすることができる．

ここで，ゴルフを長く楽しむ為には，正しいスイングを身につける事が重要である．理にかなった効率の良いスイングは，好不調の波を少なくし，何よりも体の負担を軽減することができる．効率のいいスイングというと飛距離のみがクローズアップされがちだが，効率が良いければスイングの際に力むことがなく，飛距離を維持しながらボールをコントロールできるため正確さにもつながる．そのため，ゴルフスイングについて多くの解説がなされており，その内容はどのようにすれば遠くへ飛ばせるか，スイング時のどこで力を加えるかなど様々である．しかし，それらの多くは腕の振りや体の動きなど形から論じられているものや，実際にスイングをするには無理のある体の動きであったり，プロにしかできないような動作である場合が多い．これでは一般のプレイヤーも正確にスイングできるかどうかの確証を得ることはできない．このように，スイングを経験的，形式的に論じてあるものが非常に多く，スイングを力学から捕られているものは少ない．

そこで，本研究では，経験的，形式的に語られるゴルフスイングを動力学の視点から考えることで，より合理的に理解する事ができるようにする．また，初期角度，ゴルフクラブの長さ，腕の長さ，また，その質量などを変化させた場合，スイングに対してどのような影響があるかを検討する．

## 2章 目的

ゴルフスイングは体の重心移動，クラブの動き，リストの動きなど，非常に複雑な動きの集合体である．また，飛距離を伸ばすためにはインパクト時のヘッドスピードを大きくすることが重要であるため，リストターンはゴルフスイングの中でも最も重要な動作の一つであるといえる．そこで，このリストターンに注目することによって，ゴルフスイングについてのメカニズムを知ることが目的とする．

- 1) 2リンクモデルを用いたゴルフスイングのモデル化を行う．
- 2) Lagrange の法則を用いて運動方程式を導出する．
- 3) アンコックの開始位置を検討する．2)の運動方程式よりアンコックの開始条件のための式を導出し，クラブの長さや，初期角度がアンコック開始のタイミングにどのように影響するかを検討する．
- 4) 実際のスイングとシミュレーションとのデータを比較検討する．
- 5) クラブの質量，長さなどの各パラメータ変化に対するスイングへの影響を考察する．

### 3章 モデリング

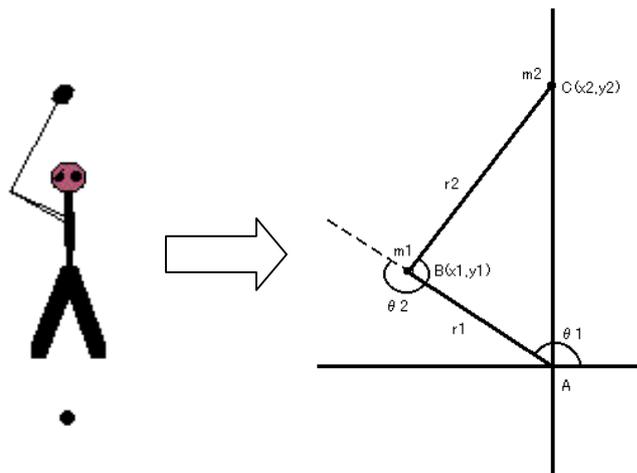


図 1 . ゴルフスイングのモデル化

プレイヤーとクラブからなるゴルフスイングを数学モデルとして、図 1 のような 2 リンクモデルを用いる。  $r_1$  はプレイヤーの腕部分の長さ、  $r_2$  はゴルフクラブの長さを、点 A は肩部分、点 B はリスト部、点 C はクラブヘッドを表している。本研究では腕にかかるトルクは一定であるとする。また、  $\theta_2$  はダウンスイング開始時の値 ( $-\alpha$ ) 以下にはならないものとする。よって、ダウンスイング開始後、アンコックが始まるまでは  $r_1$ 、  $r_2$  は一体で運動し、アンコック開始後 2 自由度の運動となる。ここで、コックとはバックスイングの途中で生じる手首の折れ曲がりのことを言い、このコックをほどくことをアンコックと呼ぶ。

## 4章 運動方程式

ここでは，Lagrange の法則を用いて運動方程式を導出する．

図 1 における点 B，C の位置及びその速度は以下のように表される．

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1 \quad (1)$$

$$y_1 = r_1 \sin \theta_1 \quad (2)$$

$$x_2 = r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (3)$$

$$y_2 = r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (4)$$

$$\dot{x}_1 = -r_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (5)$$

$$\dot{y}_1 = r_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (6)$$

$$\dot{x}_2 = -r_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - r_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (7)$$

$$\dot{y}_2 = r_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + r_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (8)$$

点 B，C での質量を  $m_1$ ， $m_2$ ，運動エネルギーを  $T_a$ ， $T_b$  とすると，

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_b &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} m_2 \{ r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + r_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2r_1 r_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \} \quad (10) \end{aligned}$$

スイング平面が鉛直面となす角度を  $\phi$  とおくと，同様にポテンシャルエネルギー

$U_a$ ， $U_b$  は以下のようになる．

$$U_a = m_1 r_1 \sin \theta_1 g \cos \phi \quad (11)$$

$$U_b = m_2 \{ r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \} g \cos \phi \quad (12)$$

Lagrange 関数を  $L(=T_a + T_b - U_a - U_b)$  とすると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta}_1 + m_1r_1^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + 2m_2r_1r_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 + m_2r_1r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= (m_1 + m_2)r_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2r_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ &+ m_2r_1r_2(2\ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 + \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \{-(m_1 + m_2)r_1 \cos\theta_1 - m_2r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\} g \cos\phi \quad (15)$$

よって， $\theta_1$ に関する運動方程式は以下ようになる．

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2)r_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2r_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ &+ m_2r_1r_2(2\ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 + \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2) \\ &+ \{(m_1 + m_2)r_1 \cos\theta_1 + m_2r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\} g \cos\phi = T_1 \end{aligned} \quad (16)$$

同様に， $\theta_2$ について，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2r_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2r_1r_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2r_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2r_1r_2\ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 - m_2r_1r_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \quad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2r_1r_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin\theta_2 - m_2r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) g \cos\phi \quad (19)$$

よって， $\theta_2$ に関する運動方程式は以下ようになる．

$$m_2r_2 \{r_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + r_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 + r_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 + \cos(\theta_1 + \theta_2) g \cos\phi\} = T_2 \quad (20)$$

## 5章 アンコック

アンコックが開始されるタイミングについて知ることは、ゴルフスイングを考える上で非常に重要であり、アンコック開始時期を変化させることによってより正確なスイングを実現することが可能となる。ここでは、アンコック開始に関する条件について検討する。

アンコック開始までは  $r_1$  及び  $r_2$  は一体で運動し、 $\theta_2$  はダウンスイング時の角度を保ったままと考える。腕のトルクが一定であり、リスト部分においてアンコックを助けるためのトルクが加わらないものとすれば、ダウンスイングが進むにつれ、角加速度によって発生する慣性力は  $\theta_2$  を小さくするような方向に働き、角速度による遠心力が発生し  $\theta_2$  を大きくするような方向に働く。また、通常のスイング速度では重力の影響は少ないので、ここでは無いものとする。この2つの力の合成により、アンコック開始時期が決まる。つまり、遠心力が慣性力より上回ればアンコックが開始することになる。

ここで、アンコックが開始する瞬間を考える。  $\theta_2$  は  $-\alpha$ 、そのときの速度は0であるから、

$$\theta_2 = -\alpha \quad (21)$$

$$\dot{\theta}_2 = 0 \quad (22)$$

となる。これらを  $\theta_2$  に関する運動方程式に代入すれば以下のようになる。

$$r_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + r_1\ddot{\theta}_1 \cos \alpha - r_1\dot{\theta}_1^2 \sin \alpha + g \cos(\theta_1 - \alpha) \cos \phi = 0 \quad (23)$$

よって、リスト部の相対加速度は

$$\ddot{\theta}_2 = -\ddot{\theta}_1 - \frac{r_1}{r_2}\ddot{\theta}_1 \cos \alpha + \frac{r_1}{r_2}\dot{\theta}_1^2 \sin \alpha - \frac{1}{r_2}g \cos(\theta_1 - \alpha) \cos \phi \quad (24)$$

となる。

ここで、 $\ddot{\theta}_1 > 0$  であればリストが開き始めることになる。アンコックが始まるためには以下の条件を満たせばよい。

$$\dot{\theta}_1^2 > \{r_2\ddot{\theta}_1 + r_1\ddot{\theta}_1 \cos \alpha + g \cos(\theta_1 - \alpha) \cos \phi\} / r_1 \sin \alpha \quad (25)$$

通常のスイング速度では，アンコック開始位置に対する重力の影響は大きくないので，ここで重力を無視すれば，

$$\dot{\theta}_1^2 > \ddot{\theta}_1 (r_2 + r_1 \cos \alpha) / (r_1 \sin \alpha) \quad (26)$$

となる．

これは， $\ddot{\theta}_1$  が与えられた場合，速度 $\dot{\theta}_1$ が上昇していくが，式(26)を満たさないうちは $\theta_2$ は初期値のまま動かず， $\dot{\theta}_1$ がさらに速度を増し式(26)を満たせばアンコックが開始することを意味している．

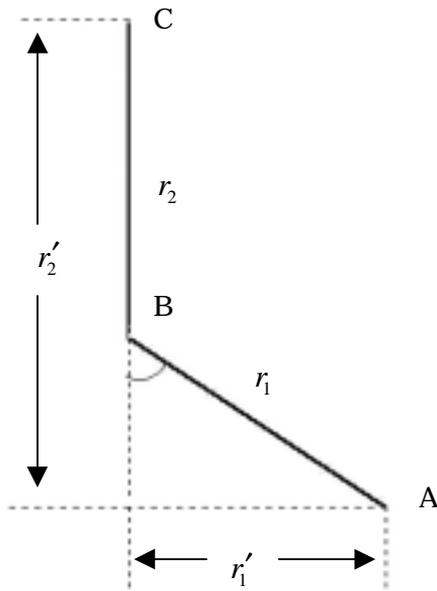


図 2 .  $r_1, r_2$  と  $r'_1, r'_2$  との関係

図 2 のように， $r'_1 = r_1 \sin \alpha$ ， $r'_2 = r_2 + r_1 \cos \alpha$  とおき，さらに，式(26)の両辺が等しくなる，つまり，アンコック開始直前の速度を $\dot{\theta}_{10}$ ，また，そのときの加速度を $\ddot{\theta}_{10}$ とおけば以下のように表せる．

$$\dot{\theta}_{10}^2 = \ddot{\theta}_{10} (r_2 + r_1 \cos \alpha) / (r_1 \sin \alpha) = \ddot{\theta}_{10} (r'_2 / r'_1) \quad (27)$$

ここで 腕とクラブが一体で動いている場合の点 A まわりの慣性モーメントを J

とおくと，

$$J = m_2 \{ (r_2 + r_1 \cos \alpha)^2 + (r_1 \sin \alpha)^2 \} + m_1 r_1^2 \quad (28)$$

また，ダウンスイング時における角加速度  $\ddot{\theta}_1$  は，以下のように表せる．

$$\ddot{\theta}_1 = T_1 / J \quad (29)$$

式(27)，(29)より，アンコック開始速度は

$$\dot{\theta}_{10} = \{ (T_1 / J) \cdot (r_2 + r_1 \cos \alpha / r_1 \sin \alpha) \}^{1/2} = (T_1 r_2' / J r_1')^{1/2} \quad (30)$$

ここで，加振トルクが一定であるとすれば，加速度も一定となるので，アンコック開始までの腕の角変位は次のようになる．

$$\delta = \dot{\theta}_{10}^2 / 2\ddot{\theta}_{10} = (r_2 + r_1 \cos \alpha) / (2r_1 \sin \alpha) = r_2' / 2r_1' \quad (31)$$

ここで，パラメータの影響を把握するために無次元パラメータ  $\mu (= m_2 / m_1)$ ， $\gamma (= r_2 / r_1)$  を導入して無次元化を行っておく．

ここで，式(31)からアンコックについてどのようなことがわかるかを検討する．  
図 3 は  $\gamma = 1.1, 1.4$  と一定とし， $\alpha$  の値を  $\pi/6$  から  $3\pi/4$  まで変化させた場合の  $\delta$  の変化の様子であり，図 4 は同様の条件での  $\dot{\theta}_{10}$  の変化の様子を示す．また，図 5 は  $\alpha = \pi/2, 2\pi/3$  と一定とし， $\gamma$  を 1.0 から 1.5 まで変化させた場合の  $\delta$  の変化の様子であり，図 4 は同様の条件での  $\dot{\theta}_{10}$  の変化の様子を表している．

これらの結果からアンコックについて以下のようなことがわかる．

$r_1'$  が小さい，または， $r_2'$  が大きいほど角変位が大きくなる，つまり，アンコック開始は遅くなり，アンコック開始速度が速くなる．また， $\alpha$  が小さいほうが角変位が大きくなりアンコックが遅くなる． $\alpha$  が一定の場合は， $r_1'$  が小さく， $r_2'$  が大きいほどアンコックは遅くなる．つまり，腕が短いほど，ゴルフクラブが長いほどアンコックが遅くなることを表している．

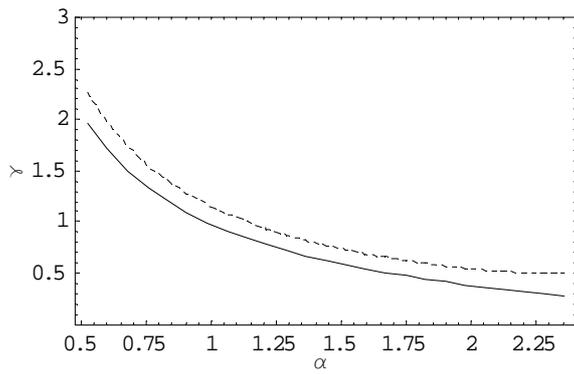


図 3 .  $\gamma$  が一定の場合の  $\alpha$  と  $\delta$  との関係

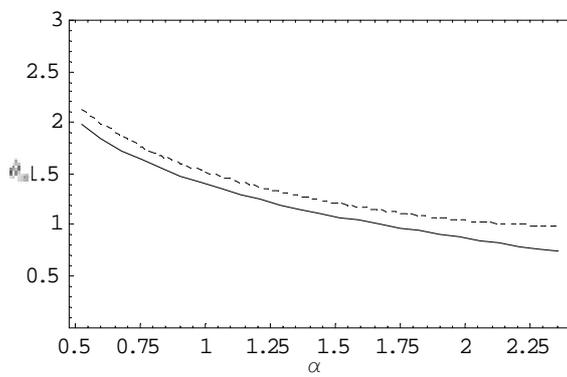


図 4 .  $\gamma$  が一定の場合の  $\alpha$  と  $\theta_{10}$  との関係

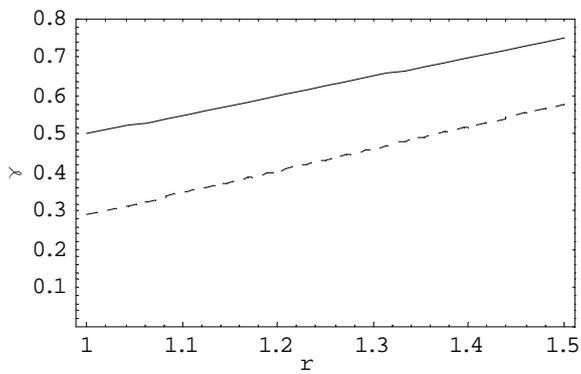


図 5 .  $\alpha$  が一定の場合の  $\gamma$  と  $\delta$  との関係

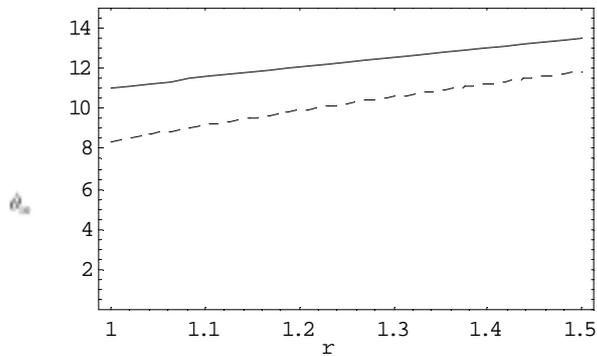


図 6 .  $\alpha$  が一定の場合の  $\gamma$  と  $\theta_{10}$  との関係

## 6章 各種パラメータ変化におけるスイングへの影響

本章では，これまでに導出した式を用いて，腕の長さ，クラブ長さ，その質量，コック角などの各パラメータが，アンコック開始後のスイングに対してどのような影響を与えるかを検討する．また，ここでは計算の手段として Mathematica を用いる．まず， $\eta$ ， $\alpha$ ， $\mu$ ， $\gamma$ を入力し，アンコック速度およびそのときの開始位置を式(30)，(31)を用いて計算を行う．ここで $\eta$ は $\theta_1$ の初期値とする．これらの値を初期条件として運動方程式を解く．具体的なプログラムの内容は付表に示す．

はじめに， $\eta = 2\pi/3$ ， $\alpha = \pi/2$ ， $\mu = 0.3$ ， $\gamma = 1.4$ としたときを基本条件として考える．そのときの角速度および角変位の時刻歴応答を図7，8に示す． $\theta_1$ については，インパクトの地点となる $3\pi/2$ の位置が0になるように原点を移動している．よって， $\theta_1$ ， $\theta_2$ が0になるタイミングがほぼ一致していれば正確にスイングできているといえる．図7では， $\theta_1$ については，はじめは速度が増加しているがインパクトが近づくにつれ速度が減少し， $\theta_2$ については，同様に速度が増加し，インパクトが近づくにつれさらに速度が増していることがわかる．これは腕の速度がクラブの速度へ移動していると考えられることができる．また，図8では， $\theta_2$ がかなり遅れていることがわかる．

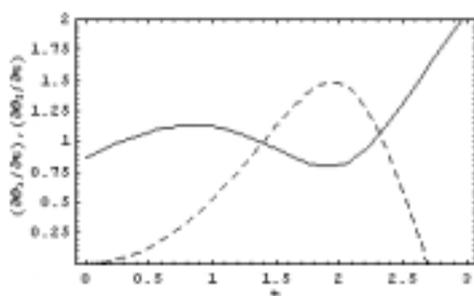


図7．角速度の時刻歴応答

$$(\eta = 2\pi/3, \alpha = \pi/2, \mu = 0.3, \gamma = 1.4)$$

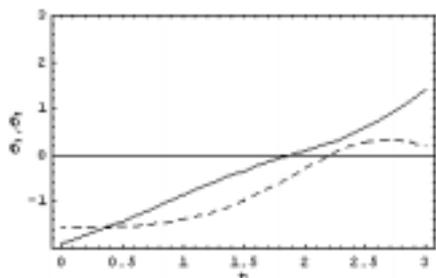


図8．角変位の時刻歴応答

$$(\eta = 2\pi/3, \alpha = \pi/2, \mu = 0.3, \gamma = 1.4)$$

次に、図 8 でのスイングの遅れを補正するために、基本条件からクラブ長さを変更し、 $\gamma=1.1$ とする。そのときの角速度および角変位の時刻歴応答を図 9、10 に示す。図 9 でのクラブ速度は図 7 のものと比べて増加が大きくなっている。これはクラブ長さが短くなったために、腕からクラブに移動するエネルギーがクラブ長さが長い時と比べて小さくなり、結果としてクラブ速度が大きくなっていると思われる。

図 10 では、 $\theta_1, \theta_2$  が 0 になるタイミングがほぼ一致しており、ボールを正確にヒットできているといえる。

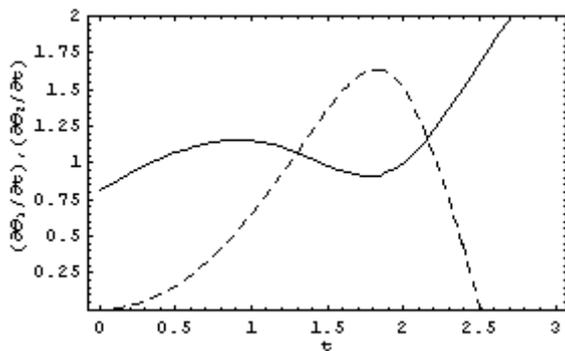


図 9 . 角速度の時刻歴応答  
 $(\eta = 2\pi/3, \alpha = \pi/2, \mu = 0.3, \gamma = 1.1)$

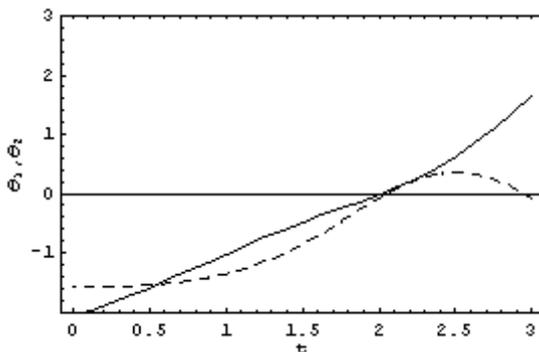


図 10 . 角変位の時刻歴応答  
 $(\eta = 2\pi/3, \alpha = \pi/2, \mu = 0.3, \gamma = 1.1)$

また、ゴルフクラブの長さをすぐに変えることは実際には困難である場合も多い。その場合、このほかにダウンスイング開始位置 $\eta$ を変えることでスイングを補正することができる。 $\eta = \pi/2$ 、 $\alpha = \pi/2$ 、 $\mu = 0.2$ 、 $\gamma = 1.4$ としたときの角速度および角変位の時刻歴応答を図 11、12 に示す。ここでは、 $\eta$ を小さくすることでストロークを大きくし、スイングのずれを補正している。

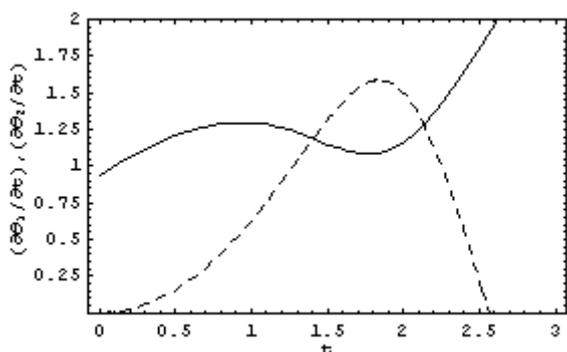


図 11 . 角速度の時刻歴応答  
( $\eta = \pi/2, \alpha = \pi/2, \mu = 0.2, \gamma = 1.4$ )

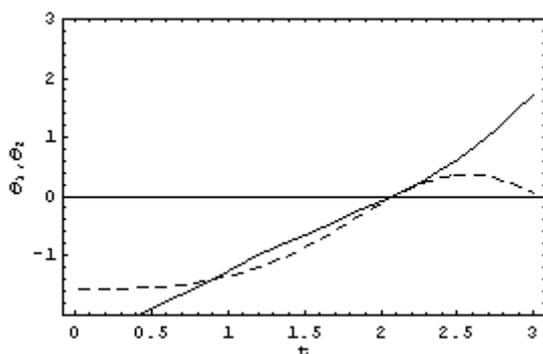


図 12 . 角変位の時刻歴応答  
( $\eta = \pi/2, \alpha = \pi/2, \mu = 0.2, \gamma = 1.4$ )

## 7章 結言

本研究では，ゴルフスイングの数学モデルとして 2 リンクモデルを用い，Lagrange の方法によって運動方程式を導出した．また，アンコック開始位置についての理論を導出し，腕の長さ，クラブ長さ，コック角がアンコックにどのように影響するかを検討した．これによって，ドライバーはスイングを大きく，アイアンは小さくといった，今まで経験的に言われてきたことが正しいものであることが分かった．アンコック開始後のスイングにおいて，各パラメータを変化させた場合，それがスイングに対してどのような影響を及ぼすかを明らかにするとともに，正確にスイングするための補正方法を考察を行うことで，ゴルフスイングについての動力的メカニズムを明らかにした．

## 謝辞

本研究を行うにあたりご指導して下さった，井上善雄教授，甲斐義弘助手に深く感謝いたします．

## 参考文献

高知工科大学知能機械システム工学科，日本自転車振興会：ヒューマンフレンドリーロボット，(2000)

```

m1 = 1.0
m2 = 0.3
r1 = 1.0
r2 = 1.1
gdt = 0
q = 3.141592 / 180
s01 = 120 q
alp = 90 q
s02 = 360 q - alp
g = 9.8
fai = 30 q
gcf = g Cos[fai] gdt
tr0 = 1
tr[t] = tr0
rr = (r2 + r1 Cos[alp])2 + (r1 Sin[alp])2
jj = m2 rr + m1 r12
a1 = tr0 / jj
v1 = Sqrt[(a1 (r2 + r1 Cos[alp]) + gcf Cos[s01 - alp]) / (r1 Sin[alp])]
unc = v12 / a1 / 2
unc / q
ank = s01 + unc
ank / q

NDSolve[{gcf ((m1 + m2) r1 Cos[s3[t]] + m2 r2 Cos[s3[t] + s2[t]]) - 2 m2 r1 r2 Sin[s2[t]]
  s32[t] s22[t] - m2 r1 r2 Sin[s2[t]] s22[t]2 + m1 r12 s32'[t] + m2 r12 s32'[t]
  + m2 r22 s32'[t] + 2 m2 r1 r2 Cos[s2[t]] s32'[t] + m2 r22 s22'[t]
  + m2 r1 r2 Cos[s2[t]] s22'[t] == tr[t], s32[t] == s3'[t],
  m2 r2 (gcf Cos[s3[t] + s2[t]] + r1 Sin[s2[t]] s32[t]2
  + (r2 + r1 Cos[s2[t]]) s32'[t] + r2 s22'[t]) == 0, s22[t] == s2'[t], s32[0] == v1,
  s3[0] == ank, s22[0] == 0, s2[0] == -alp}, {s2[t], s22[t], s3[t], s32[t]}, {t, 0, 3}]

gy3 = Plot[Evaluate[s3[t] - s02 /. Out[[1]]], {t, 0, 3}, Frame -> True]

gz3 = Plot[Evaluate[s32[t] /. Out[-2][[1]]], {t, 0, 3}, Frame -> True]

gy2 = Plot[Evaluate[s2[t] /. Out[-3][[1]]], {t, 0, 3}, Frame -> True, PlotStyle ->
{Dashing[{0.02, 0.02}]}]

gz2 = Plot[Evaluate[s22[t] /. Out[-4][[1]]], {t, 0, 3}, Frame -> True, PlotStyle ->
{Dashing[{0.02, 0.02}]}]

gzz = Show[gz2, gz3, PlotRange -> {0, 2}, FrameLabel ->
{" t ", " (∂θ1/∂t), (∂θ2/∂t) "}]

gyy = Show[gy2, gy3, PlotRange -> {-2, 3}, FrameLabel ->
{" t ", " θ1, θ2 "}]

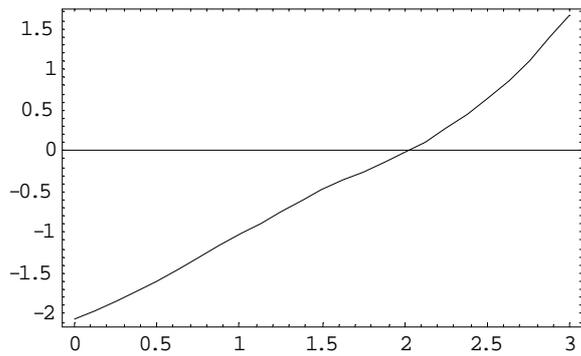
```

1.  
 0.3  
 1.  
 1.1  
 0  
 0.0174533  
 2.09439  
 1.5708  
 4.71239  
 9.8  
 0.523599  
 0  
 1  
 1  
 2.21  
 1.663  
 0.601323  
 0.813299  
 0.55  
 31.5127  
 2.64439  
 151.513

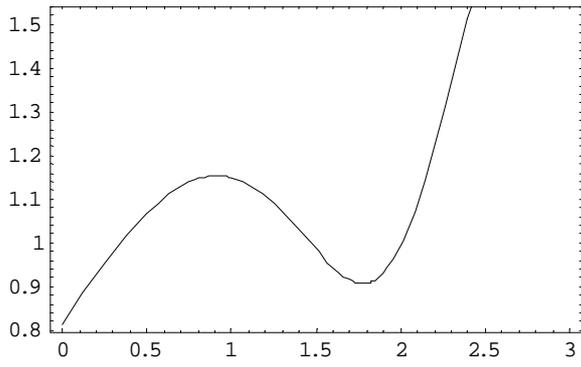
```

{{s2[t] → InterpolatingFunction[{{0., 3.}}, <>][t],
 s22[t] → InterpolatingFunction[{{0., 3.}}, <>][t], s3[t] → InterpolatingFunction[{{0., 3.}}, <>][t],
 s32[t] → InterpolatingFunction[{{0., 3.}}, <>][t]}}

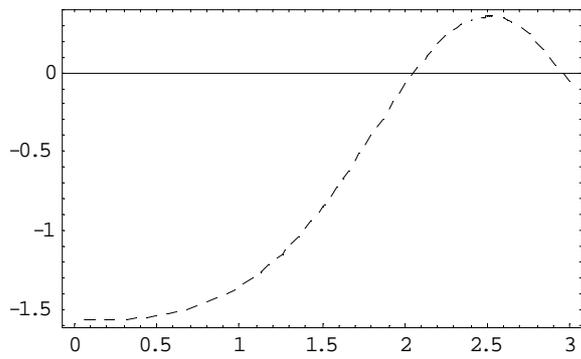
```



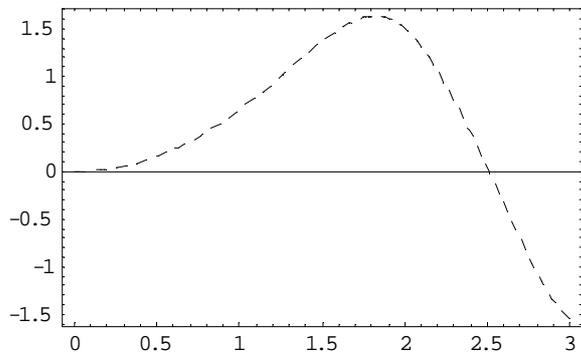
- Graphics -



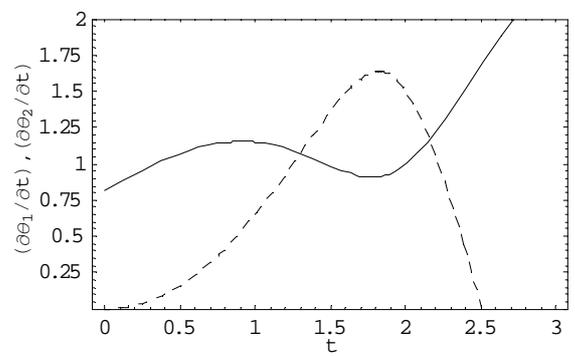
- Graphics -



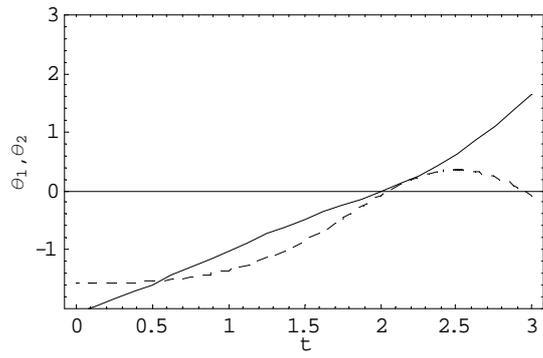
- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -

```

r1 = 1.0
r2 = 1.1
aln = 30
alx = 135
q = 3.141592 / 180
fad = 30
fai = fad q
gdt = 0
gcf = gdt 9.8 Cos[fai]
as1 = 121
xn = aln q
xx = alx q

f[x_] = (r2 + r1 Cos[x] + gcf / as1) / (r1 Sin[x])
gx1 = Plot[f[x] / 2, {x, xn, xx}, Frame -> True]
fv[x_] = Sqrt[f[x]]
gv1 = Plot[fv[x], {x, xn, xx}, Frame -> True]

r2 = 1.4

f[x_] = (r2 + r1 Cos[x] + gcf / as1) / (r1 Sin[x])
gx2 = Plot[f[x] / 2, {x, xn, xx}, Frame -> True, PlotStyle ->
{Dashing[{0.01, 0.01}}]}
fv[x_] = Sqrt[f[x]]
gv2 = Plot[fv[x], {x, xn, xx}, Frame -> True, PlotStyle ->
{Dashing[{0.01, 0.01}}]}

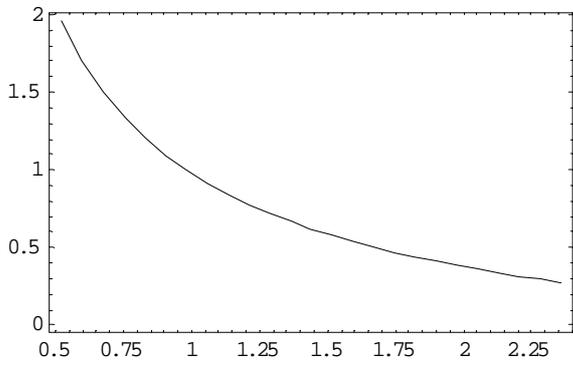
grr = Show[gx1, gx2, PlotRange -> {0, 3.}, FrameLabel -> {" α", " γ "}]
grr = Show[gv1, gv2, PlotRange -> {0, 3.}, FrameLabel -> {" α", " "}]

1.
1.1
30
135
0.0174533
30
0.523599
0
0
121
0.523599

```

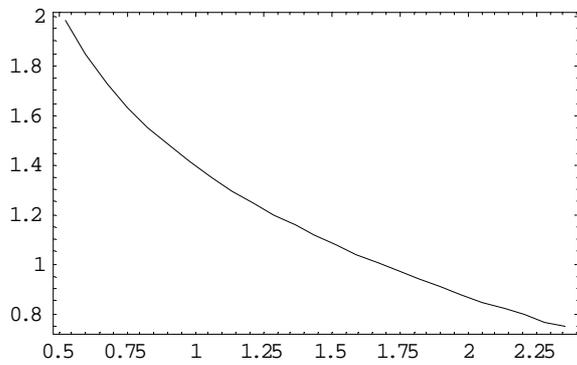
2.35619

1.  $(1.1 + 1. \cos[x]) \operatorname{Csc}[x]$



- Graphics -

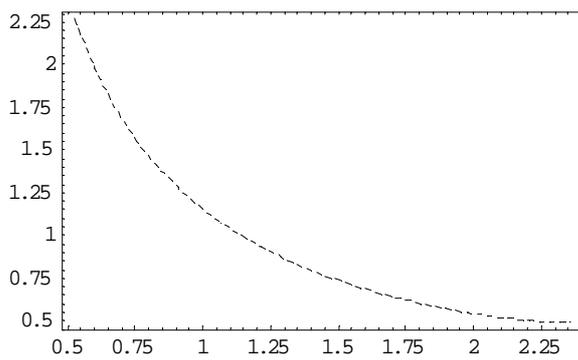
1.  $\sqrt{(1.1 + 1. \cos[x]) \operatorname{Csc}[x]}$



- Graphics -

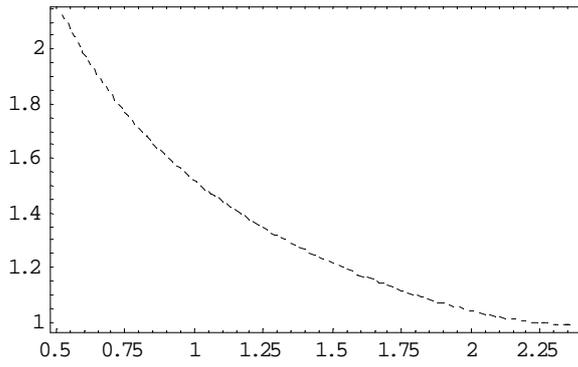
1.4

1.  $(1.4 + 1. \cos[x]) \operatorname{Csc}[x]$

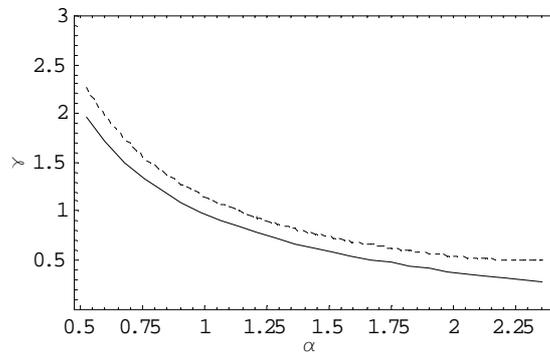


- Graphics -

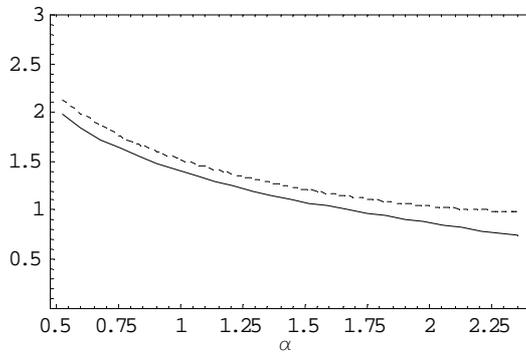
1.  $\sqrt{(1.4 + 1. \cos[x]) \operatorname{Csc}[x]}$



- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -

```

r1 = 1.0
q = 3.141592 / 180
ald = 90
alp = ald q
fad = 30
fai = fad q
gdt = 0
gcf = gdt 9.8 Cos[fai]
as1 = 121
xn = 1.0
xx = 1.5

f[x_] = (x + r1 Cos[alp] + gcf / as1) / (r1 Sin[alp])
gx1 = Plot[f[x] / 2, {x, xn, xx}, Frame -> True]
fv[x_] = Sqrt[f[x] as1]
gv1 = Plot[fv[x], {x, xn, xx}, Frame -> True]

ald = 120
alp = ald q

f[x_] = (x + r1 Cos[alp] + gcf / as1) / (r1 Sin[alp])
gx2 = Plot[f[x] / 2, {x, xn, xx}, Frame -> True, PlotStyle ->
{Dashing[{0.02, 0.02}}]]
fv[x_] = Sqrt[f[x] as1]
gv2 = Plot[fv[x], {x, xn, xx}, Frame -> True, PlotStyle ->
{Dashing[{0.02, 0.02}}]]

grr = Show[gx1, gx2, PlotRange -> {0, 0.8}, FrameLabel ->
{" r ", " γ "}]
grr = Show[gv1, gv2, PlotRange -> {0, 15}, FrameLabel ->
{" r ", " "}]

```

```

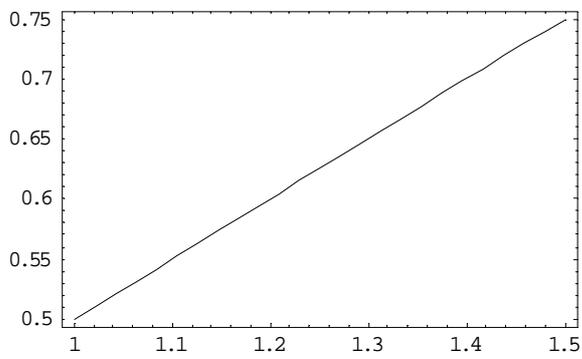
1.
0.0174533
90
1.5708
30
0.523599
0
0
121

```

1.

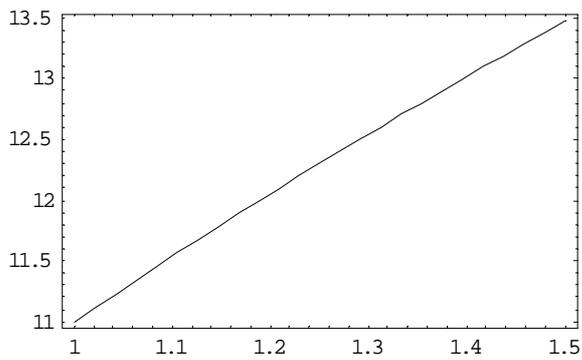
1.5

$$1. (3.26795 \times 10^{-7} + x)$$



- Graphics -

$$11. \sqrt{3.26795 \times 10^{-7} + x}$$

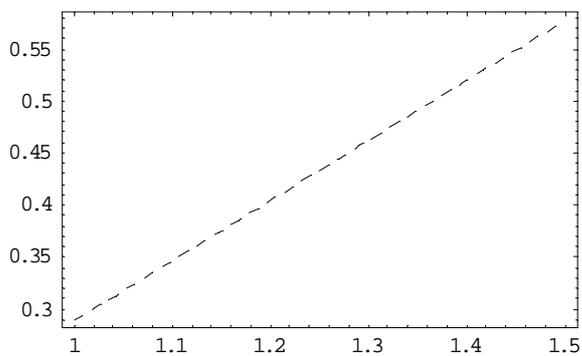


- Graphics -

120

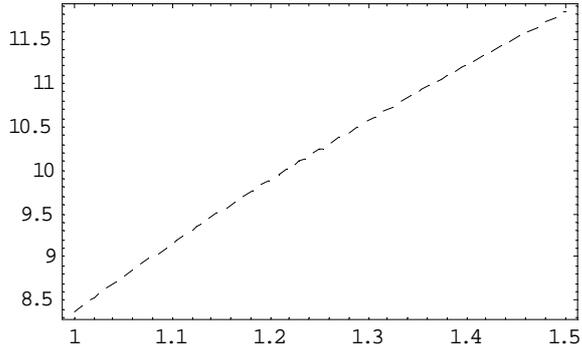
2.09439

$$1.1547 (-0.5 + x)$$

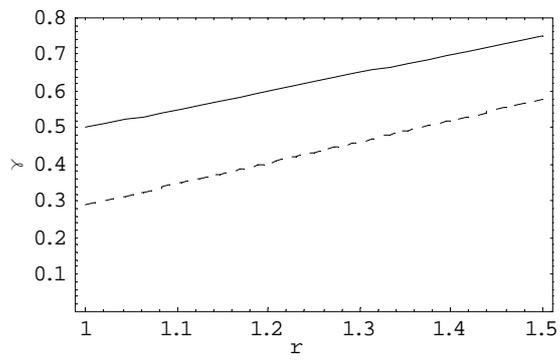


- Graphics -

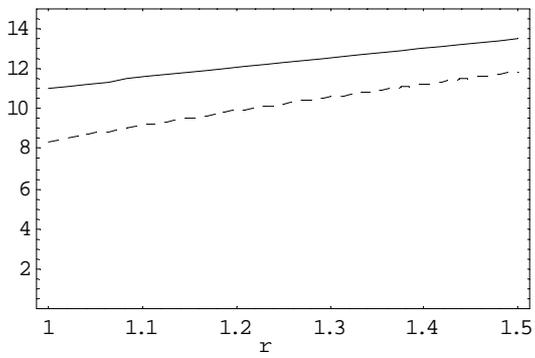
$$11.8203 \sqrt{-0.5 + x}$$



- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -