平成 14 年度

学士学位論文

誤差を伴う共役勾配法における反復回数の最適化

Optimize of the Number of Interations in the Conjugate Gradient Method Acompanied by an Error

1030314　水口智映子

指導教員　福本昌弘

2002 年 2 月 24 日

高知工科大学 情報システム工学科

要 旨

誤差を伴う共役勾配法における
反復回数の最適化

水口智映子

ディジタル信号処理で扱う対象は，物理現象であることが多く，非線形問題の問題を解くことになる．数学的に，非線形最適化問題は方程式としては解きにくいとされている．また，線形モデルに近似して解こうとしても，ほとんどの場合，問題は起こらないと言われている．そのため，線形最適化問題は広く要求されている．このように，線形最適化問題を解くということは，連立一次方程式を解くことになる．しかし，ディジタル信号処理で扱う問題は雑音を含むため，連立１次方程式にすると雑音を含む．

連立１次方程式を解く方法は，大きく分けて直接解法と反復解法の２つに分類される．この直接解法，反復解法はともに，誤差を含んでいる場合厳密解には到達しない．しかし，反復法は近似解を求める方法であるため，反復回数によって誤差と演算量を比較的自由に決めることができる．そのため，最適な反復回数を決める方法が要求される．

過去の研究では，雑音の影響を受けやすい共役勾配法について入力信号の相関係数や S/N の違いに応じた反復回数の検討がなされている．

本研究では，誤差を伴う共役勾配法を用いて，相関係数や S/N の変化によって反復回数を考察する．そのため，条件数を用いて誤差を軽減する最適な反復回数の決定法を検討する．

キーワード　共役勾配法，反復回数，誤差，条件数

Abstract

Optimize of the Number of Interations in the Conjugate Gradient Method Acompanied by an Error

Chieko MINAKUCHI

The object used by digital signal processing is a physical phenomenon in many cases, so it means solve the physical phenomenon is solve a problem of a non-line problem. Mathematically, it is supposed that it is hard to solve a nonlinear optimization problem as an equation. When try to solve a nonlinear optimization problem , if it resembles a linear model and solves, it is supposed that it is satisfactory in almost all the cases. In this reason the linear optimization problem is demanded widely. Thus, solving a linar optimization problem is solve simultaneous equations. Since the problem with which it deals by digital signal processing includes noise, it will include noise also in simultaneous equations.

The solution method of simultaneous equations is roughly divided two methods, a direct method and a interative method.These two methods are can't attainment the strict solution, if simultaneous equations include any noizes. But interative method is method to get approximation solution , an error and the amount of operations can be decided comparatively freely by the number of interation. so the method of deciding the optimal number of interation is required.

In the past research, examination of the correlation ratio of an incoming signal or the number of interative according to the difference in S/N was done about the Conjugate Gradient Method which is easy to be influenced of noise.

In this research, considerate the number of interative by changing a correlation ratio and S/N using the Conjugate Gradient Method accompanied by an error.

key words Conjugate Gradient Method,Number of interations,Error,Noise,Conditional Number

目次

図目次

表目次

第 1 章

序論

1.1　背景と目的

ディジタル信号処理で扱う対象は，物理現象であることが多く，非線形の問題を解くことに値する．数学的に非線形最適化問題は，一般的に解を求めることが難しいとされている．また，これを線形モデルに近似して解こうとしても，多くの場合問題は起こらないとされており，線形最適化問題は広く要求されている．このように，線形最適化問題を解くことは，連立一次方程式を解くことになる．しかし，ディジタル信号処理で扱う問題は雑音を含んでいるため，連立 1 次方程式にすると雑音を含んだ連立 1 次方程式となる．

連立方程式を解く方法は，直接解法と反復解法に分類される．直接解法，反復解法共に，誤差を含んでいる場合，厳密解には到達することはない．しかし，反復解法は近似解を求める方法であるため，反復回数によって演算量と誤差を比較的自由に決めることができる．そのため，最適な反復回数を求める方法が要求されている．

代表的な適応アルゴリズムとして，LMS アルゴリズムや学習同定法がある．LMS アルゴリズムは，演算量が少ない点から代表的な適応アルゴリズムとして用いられている．学習同定法は，これと比べると演算量はやや複雑だが，高速な収束特性をもっており，実用性に優れたアルゴリズムである．しかし，両者とも，有色入力信号であるとき，収束速度が著しく劣化することが知られている [1]．この解決策としてアフィン射影算法があるが，演算量が多くなってしまう欠点をもっている [1]．そこで，この欠点を補うために，ブロック直交射影アルゴリズムが提案された．これを実現する一方法として，共役勾配法が挙げられる．また，これは，対称正定値行列を係数とする連立 1 次方程式を解くことに適している [7]．

そのため，本研究では，反復法の 1 つである共役勾配法を用いる．共役勾配法は，反復法でありながら，有限回のステップで厳密解に到達する性質をもっている．しかし，実際に適応アルゴリズムで用いる場合，雑音の影響によって厳密解には到達せず，十分な精度が得られない．すなわち，雑音の影響により収束速度と収束精度の両立は困難である．

過去の研究では，入力信号の相関係数や S/N の違いによって収束精度を決める主な要因と考えられる反復回数の検討がなされている [2].

本研究では，共役勾配法を用いて，相関係数や S/N の変化によって，誤差を軽減させるための最適な反復回数の決定法を導き出す.

1.2　本論文の概要

ここでは，本論文の概要について示す.

第 2 章では，本研究を行う上で必要な適応アルゴリズムや，共役勾配法の説明について述べる．また，共役勾配法の計算手順やこれを用いるときの条件を示す.

第??章では，計算機シミュレーションにより評価した結果を表し，共役勾配法における最適反復回数と誤差を評価する.

第 4 章では，第 3 章で示したような手法によって発生した誤差の原因と軽減を考察する．誤差が大きくなるところに着目し，固有値による条件数を調べる.

第 5 章では，条件数によっての誤差増大の原因を明らかにし，どのくらいの変化が反復回数に要されるかを調べる．これを，相関係数と S/N の変化によって条件数と最適反復回数を調べる．また，誤差の大きい行列を抜粋し，条件数と最適反復回数の回帰直線によって表す.

さらに、回帰直線によって予想される反復回数を試行する．そこで得られる誤差を最適反復回数の平均値によって出された誤差と比べる.

第 2 章

適応アルゴリズム

2.1　はじめに

本章では，適応アルゴリズムの種類とその説明を行う．また，これらの欠点を補う方法の1つである共役勾配法について示し，その手法を説明する．

更に，共役勾配法を本研究で用いるときの条件を示す．

2.2　適応信号処理

入力信号の情報を，完全に熟知できない場合がある．このとき，信号処理の過程で信号処理システムをある基準のもとで最適となるように修正する機能を備えたシステムが必要となる．信号処理過程で必要に応じてシステムの特性を変化させる機能を備えた信号処理を適応信号処理と言う．また，そのシステムを適応フィルタと呼び，システムの特性を変化させる方法を適応アルゴリズムと言う．

2.2.1　代表的な適応アルゴリズム

1960 年に Widow と Hoff は，適応スイッチング回路の研究において LMS アルゴリズムと呼ばれる適応アルゴリズムを開発した．これは，2 乗平均誤差を最急降下法に基づいて最小にする一方法である．また，安定性があり，演算量が少ないという理由から代表的なアルゴリズムとされている．

さらに，1967 年には，野田と南雲が学習同定法を発表した．これは，LMS アルゴリズム

に比べてやや複雑だが，収束速度が入力信号の大きさに依存せず，高速な収束特性をもっている．そのため，実用的に優れたアルゴリズムと言える．

しかし，両者とも入力信号が有色の場合，収束速度，特に推定すべきパラメータの収束速度が著しく劣化するという欠点をもつことが指摘されている [1].

適応アルゴリズムに求められる課題は

- 収束速度の高速化
- 実行速度の高速化
- 動作の安定性

である．

収束速度の高速化に関しては，推定すべきパラメータへの収束速度と，評化量の収束値への収束速度の 2 点が考えられる．できるだけ，短い語長でプロセッサを構成しようとする試みは，実行速度の高速化と，ハードウェアの小規模化を同時に満足するが，実行速度の高速化をハードウェアの面積に依存させる並列処理では，これらは相反する要求となる．また，一般的に，収束速度の向上は，ハードウェアの複雑化につながる．このように，適応アルゴリズムの課題は，相互に関連するため，全てを満足するようなアルゴリズムを開発することは難しい．さらに，動作の安定性についても考慮しなければならない．

2.3　ブロック適応アルゴリズム

ブロック適応アルゴリズムとは，入力信号と所望出力信号を有限個ずつブロック化し，そのデータブロックごとに 1 回だけ係数修正を行う．ブロック直交射影アルゴリズムとは，演算量の軽減を目的としてアフィン射影算法にブロック処理を導入したものである．アフィン射影算法とは，データのブロック化を行っている点で同じであるが，これは 1 サンプルごとに係数を修正するもので、ブロック処理とは言えない．

ここで，以下にブロック直交射影アルゴリズムとアフィン射影算法の共通点と相違点について述べる．

- 共通点

  両者を比べると，1 回の係数修正に複数の入力信号ベクトルを用い，それぞれのベクトルが張る部分空間への直交射影演算に基礎を置ている．これは，基本的に入力状態行列を係数行列とする連立 1 次方程式の解の中で，最小ノルム解を求めることに帰着する．

- 相違点

  アフィン射影算法では，現サンプル時刻と次のサンプル時刻で処理の対象となるそれぞれの入力状態行列は，$(r-1)$ 個の入力信号ベクトルを共に有している．このとき，r は入力信号ベクトルの数 (ブロック長) を指している．一方，ブロック直交射影アルゴリズムの場合，連続するブロックにおける入力状態行列は，共有している信号ベクトルを持つことはない.

言い替えれば，アフィン射影算法は，1 サンプル時刻ごとに $(r-1)$ 個の信号ベクトルを重複させながら係数修正を行う．これに対して，ブロック直交射影アルゴリズムは，信号ベクトルの重複を認めず r 個ずつブロック化し，r サンプル時刻ごとに係数を修正する.

2.4　共役勾配法

共役勾配法は，1952 年に M.R.Hestenes と E.stiefel によって発表された．これは，正定値対称行列を係数行列とする連立方程式をある一定の手順によって解を求める方法である．また，反復法でありながら有限解のステップで厳密解に到達できるという性質を持っている．しかし，適応アルゴリズムで共役勾配法を用いる場合は，雑音が生じるため厳密解には到達せず，十分な精度が得られない．雑音によって，収束速度と収束精度を実現させることは困難なことなのである.

共役勾配法には各種の計算方法があり，HS 版，高橋版，2 階版，RG 版，単調版，LI 版，田辺版がある．本研究では，計算手順が簡単で適応アルゴリズムで使用するのに適した HS 版を使用する.

2.4.1　HS 版

共役勾配法の HS 版は，Hestenes と Stiefel によって発明された基本的な計算手順である．

HS 版は

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \tag{2.1}$$

で与えられる．

理論的には，行列ベクトルで表現する方が扱いやすい．そこで，連立 1 次方程式の係数行列と定数項および解ベクトルを

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \tag{2.4}$$

とすれば，方程式は

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{2.5}$$

となる．

ただし，T は転置を示す．

HS 版の計算手順は以下の通りになる．

1. $\boldsymbol{x}_{(0)}$ を適当に選ぶ
2. $\boldsymbol{r}_{(0)} = \boldsymbol{y} - A\,\boldsymbol{x}_{(0)}$
3. $\boldsymbol{p}_{(0)} = \boldsymbol{r}_{(0)}$

   $k = 0$
4. $\alpha_{(k)} = \dfrac{(\boldsymbol{r}^T_{(k)}, \boldsymbol{p}_{(k)})}{(\boldsymbol{p}^T_{(k)}, A\,\boldsymbol{p}_{(k)})}$

5. $\boldsymbol{x}_{(k+1)} = \boldsymbol{x}_{(k)} + \alpha_{(k)} A \boldsymbol{p}_{(k)}$
6. $\boldsymbol{r}_{(k+1)} = \boldsymbol{r}_{(k)} - \alpha_{(k)} A p_{(k)}$
7. $\beta_{(k)} = \dfrac{(\boldsymbol{r}_{(k+1)}, \boldsymbol{r}_{(k+1)})}{(\boldsymbol{r}_{(k)}, \boldsymbol{r}_{(k)})}$
8. $\boldsymbol{p}_{(k+1)} = \boldsymbol{r}_{(k+1)} + \beta_{(k)} \boldsymbol{p}_{(k)}$
9. 新 $k = k + 1$

収束していなければ, 手順 10 を行い, 手順 5 に戻り繰り返す.

となる.

2.4.2　共役勾配法を用いるときの条件

共役勾配法を用いる場合，n 元連立 1 次方程式を解くことを考え

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{2.6}$$

とする.

このとき，行列 A は正定値対称行列とし

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

で表すことができる.

また，$\boldsymbol{y}$ は信号 $\boldsymbol{d}$ に雑音 $\boldsymbol{v}$ が付加されたものとし，$\boldsymbol{x}$ を求める解とする.

第 3 章

反復回数

3.1 はじめに

適応アルゴリズムを使用する際，雑音が存在することを考慮しなければならない．

本章では，相関係数や S/N の違いによって最適反復回数を求める．また，各最適反復回数を用いて試行させたときの誤差を評価し，誤差を軽減するための方法を検討する．

3.2 最適反復回数

通常，共役勾配法は n 元連立方程式を解く場合，n 回の反復で厳密解に到達する．しかし，誤差を伴った連立 1 次方程式を解くと，n 回以下の反復により誤差が最小となる近似解に到達する．そのため，n 回の反復を繰り返すと近似解に到達した後の反復は誤差を増大させる原因となる．このときの誤差とは，真値と推定値を比べることで算出されるものとする．したがって，誤差が最小となるところを最適反復回数とする．

計算機シミュレーションによって, 厳密解に到達させたときの反復回数を求める．相関係数を 0，0.5，0.9，0.999 とし，S/N を -20 〜 40dB とし，$1,000$ 回試行させる．このとき，$1,000$ 回の試行で得られる反復回数の平均値と，最大値，最小値を算出する．以下の表 3.1 〜3.4 にて，その結果を示す．

ただし，このモデルは雑音が混入していることを想定しているため，信号 $\boldsymbol{d}$ と雑音 $\boldsymbol{v}$ の比は

$$S/N = \frac{E[||\ \boldsymbol{d}\ ||^2]}{E[||\ \boldsymbol{v}\ ||^2]} \tag{3.1}$$

3.2　最適反復回数

となる.

表 3.1　相関係数が 0 の場合

S/N	最適反復回数		
	最大値	最小値	平均値
-20	1	1	0.999
-10	1	1	0.999
0	3	1	1.489
10	32	1	3.776
20	86	3	8.105
30	100	4	15.781
40	100	7	28.658

表 3.2　相関係数が 0.5 の場合

S/N	最適反復回数		
	最大値	最小値	平均値
-20	1	1	0.999
-10	2	1	1.023
0	5	1	2.278
10	13	2	4.774
20	51	3	9.027
30	91	5	16.576
40	100	7	30.398

3.2 最適反復回数

表 3.3 相関係数が 0.9 の場合

S/N	最適反復回数		
	最大値	最小値	平均値
-20	4	1	1.713
-10	6	1	3.142
0	12	2	5.349
10	22	4	8.653
20	96	6	14.390
30	100	8	24.966
40	100	11	45.515

表 3.4 相関係数が 0.999 の場合

S/N	最適反復回数		
	最大値	最小値	平均値
-20	13	3	6.954
-10	22	4	9.592
0	33	6	13.557
10	46	8	19.376
20	100	12	28.356
30	100	18	42.460
40	100	24	63.039

3.2.1　評価

表 3.1〜3.4 により，最大値では相関係数が小さい程，反復回数は小さい数値から大きい数値まで広がりが見られ，増加の幅は広くなっている．しかし，最小値では，相関係数の違いによる値の増加幅の変化は見られなかった．また，相関係数に関わらず S/N が大きくなるにつれて最大値，最小値，平均値ともに反復回数が増大した．

更に，相関係数が 0 では，S/N が $-20, -10$dB，相関係数 0.5 では S/N が -20dB に限り全ての反復回数が 1 で最適反復回数となった．

3.3　誤差の評価

誤差は，最適反復回数の平均値を試行したとき増大していないか，計算機シミュレーションによって調べる．

このとき，最適反復回数の平均値は，切り上げた数値と切り下げた数値を算出し，両者の誤差を比較する．また，$1,000$ 回の試行による誤差の最大値と最小値，平均値を調査する．

ただし，誤差 ε は真値と推定値を比べることで算出される．

そのため，誤差は

$$\varepsilon = \left(||A\ \boldsymbol{x}\ -\ \boldsymbol{y}\ ||^2 \right) \tag{3.2}$$

となる．

相関係数，S/N の違いによって誤差の変化を，表 3.5〜3.12 によって示す．

3.3 誤差の評価

表 3.5 相関係数が 0 の場合の反復回数切り上げ値入力

S/N	入力値	最大値	最小値	平均値
-20	1	1.289	0.2466	9.2434×-10^1
-10	1	5.590	0.0400	9.3972×-10^1
0	2	4.070	0.0178	5.6325×-10^1
10	4	3.498	0.0065	1.9590×-10^1
20	9	1.230	0.0011	3.6160×-10^2
30	16	0.445	0.0002	9.2156×-10^3
40	29	0.070	1.1020×-10^5	2.2910×-10^3

表 3.6 相関係数が 0 の場合の反復回数切り下げ値入力の場合

S/N	入力値	最大値	最小値	平均値
-20	1	1.290	0.2466	9.2433×-10^1
-10	1	5.590	0.0400	9.3972×-10^1
0	1	27.987	0.0129	2.2470
10	3	6.534	0.0031	3.7067×-10^1
20	8	1.471	0.0011	4.4568×-10^2
30	15	0.504	0.0002	1.0240×-10^2
40	28	0.073	1.1494×-10^5	2.3087×-10^3

表 3.7　相関係数が 0.5 の場合の反復回数切り上げ値入力の場合

S/N	入力値	最大値	最小値	平均値
-20	1	2.630	0.0436	8.0174
-10	2	2.341	0.0546	5.2720×-10^{1}
0	3	4.164	0.0114	3.0642×-10^{1}
10	5	2.407	0.0031	1.1978×-10^{1}
20	10	0.776	0.0007	2.5192×-10^{2}
30	17	0.415	0.0001	6.9105×-10^{3}
40	29	0.1988	6.4175×-10^{6}	$1.8267 - 10^{3}$

表 3.8　相関係数が 0.5 の場合の反復回数切り下げ値入力の場合

S/N	入力値	最大値	最小値	平均値
-20	1	2.630	0.0436	8.03173×-10^{1}
-10	1	35.556	0.0130	1.5508
0	2	12.528	0.0022	7.2916×-10^{1}
10	4	4.518	0.0022	1.9653×-10^{1}
20	8	0.961	0.0005	3.0963×-10^{2}
30	15	0.443	0.0001	7.6852×-10^{3}
40	28	0.206	6.6914×-10^{6}	$1.8508 - 10^{3}$

表 3.9　相関係数が 0.9 の場合の反復回数切り上げ値入力の場合

S/N	入力値	最大値	最小値	平均値
-20	2	8.467	0.0107	4.8289×-10^1
-10	3	2.869	0.0025	1.5328×-10^1
0	5	1.888	0.0009	5.5851×-10^2
10	8	1.072	0.0003	1.8864×-10^2
20	13	0.507	0.0002	5.4655×-10^3
30	22	0.239	2.7142×-10^5	1.6396×-10^3
40	37	0.058	1.0973×-10^5	$4.393813e - 04$

表 3.10　相関係数が 0.9 の場合の反復回数切り下げ値入力の場合

S/N	入力値	最大値	最小値	平均値
-20	1	36.446	0.0168	2.4221
-10	2	6.259	0.0024	2.5906×-10^1
0	4	2.685	0.0006	8.1052×-10^2
10	7	1.312	0.0002	2.431×-10^2
20	12	0.559	0.0002	6.1831×-10^3
30	21	0.252	2.606×-10^5	1.7451×-10^3
40	36	0.062	1.0406×-10^6	4.4872×-10^4

表 3.11 相関係数が 0.999 の場合の反復回数切り上げ値入力の場合

S/N	入力値	最大値	最小値	平均値
-20	6	0.552	4.2952×-10^{5}	4.7350×-10^{3}
-10	8	0.233	1.4011×-10^{6}	1.7957×-10^{3}
0	11	0.049	3.6624×-10^{6}	6.7624×-10^{4}
10	17	0.021	1.5788×-10^{6}	2.5399×-10^{4}
20	25	0.007	3.6087×-10^{7}	8.7774×-10^{5}
30	37	0.002	2.7269×-10^{7}	3.2661×-10^{5}
40	57	0.001	7.1117×-10^{8}	1.3050×-10^{5}

表 3.12 相関係数が 0.999 の場合の反復回数切り下げ値入力の場合

S/N	入力値	最大値	最小値	平均値
-20	5	0.701	3.9628×-10^{5}	6.4197×-10^{3}
-10	7	0.300	1.2236×-10^{5}	2.2013×-10^{3}
0	10	0.057	3.7368×-10^{6}	7.7006×-10^{4}
10	16	0.026	1.1350×-10^{6}	2.8756×-10^{4}
20	24	0.007	3.5336×-10^{7}	9.4020×-10^{5}
30	36	0.002	2.5741×-10^{7}	3.4008×-10^{5}
40	56	0.001	7.1890×-10^{8}	1.3466×-10^{5}

3.3.1 評価

最適反復回数の平均値を試行させて得られた誤差は，平均値をみてみると反復回数が平均値の遠近に関わらず，切り上げ値入力の方が少ないことがわかった．また，誤差の最大値に関しても，切り上げ値入力の方が切り下げ値入力よりも誤差は減少している．しかし，最小値では，切り下げ値入力の誤差が少ない傾向がみられた．

誤差の最大値は，相関係数が 0.999 のとき以外に 1 を越えて増大しているものが目立った．しかし，誤差は正規化しており，1 を越えることはない．そこで，行列そのものが方程式として解きやすいものかどうかを確認するため，行列の固有値を用いて条件数を調べる．

第 4 章

誤差軽減

4.1　はじめに

本章では，最適反復回数の平均値入力によって発生した誤差を軽減するための手法を説明する．誤差の最大値に着目し，誤差軽減を目的として，その手法を説明する．その際，最小値との比較も示す.

また，それによって得られた結果を評価する.

4.2　条件数評価

誤差の平均値としては，切り上げ値入力の誤差が少ない傾向にあった．そこで，切り上げ値入力に的をしぼり，条件数を考える．$1,000$ 回の試行中，最大，最小値の誤差を出した行列の条件数を調べる (付録 A 参照).

それぞれの反復回数と行列 A の条件数を，以下の表 4.1〜4.8 によって示す.

ただし，反復回数はそれぞれの最適反復回数の平均値とし，最適反復回数は，各々の最適反復回数とする.

4.2.1　最大値の場合

3.3 で示したように最適反復回数を算出する際，大すぎる誤差が発生した．そこで，$1,000$ 回の試行中に誤差の最大値を出した行列に着目し，行列の条件数について調べる.

また，それらの結果を表 4.1〜4.4 によって示し，評価する.

4.2　条件数評価

表 4.1　相関係数が 0 の場合

S/N	反復回数	最適回数	条件数
-20	1	1	1.6628×10^3
-10	1	1	3.9105×10^3
0	2	2	5.7219×10^4
10	4	5	5.7219×10^4
20	9	13	5.7219×10^4
30	16	25	5.7219×10^4
40	29	14	2.0363×10^4

表 4.2　相関係数が 0.5 の場合

S/N	反復回数	最適回数	条件数
-20	1	1	1.7919×10^4
-10	2	1	8.1462×10^3
0	3	2	4.0953×10^4
10	5	3	3.7602×10^4
20	9	16	5.4960×10^4
30	16	29	5.4960×10^4
40	29	12	5.4960×10^4

表 4.3　相関係数が 0.9 の場合

S/N	反復回数	最適回数	条件数
-20	2	3	2.5237×10^6
-10	3	4	2.5237×10^6
0	5	4	2.5237×10^6
10	8	6	2.5237×10^6
20	13	8	2.5237×10^6
30	22	11	2.5237×10^6
40	37	17	2.5237×10^6

表 4.4　相関係数が 0.999 の場合

S/N	反復回数	最適回数	条件数
-20	6	8	1.1204×10^6
-10	8	13	1.1204×10^6
0	11	17	3.6690×10^7
10	17	13	2.8861×10^7
20	25	19	9.9661×10^6
30	37	23	9.9661×10^6
40	57	68	3.4974×10^6

4.2.2　最小値の場合

誤差の最小値について，条件数を調査する．誤差に関しては，少ない数値だが，最大値の条件数と比較するための観測である．

4.2　条件数評価

条件数を評価した結果を，表 4.5〜4.8 に示す．

表 4.5　相関係数が 0 の場合

S/N	反復回数	最適回数	条件数
-20	1	1	1.2679×10^4
-10	1	1	8.9291×10^4
0	2	2	8.9291×10^4
10	4	5	3.3863×10^2
20	9	13	3.3002×10^5
30	16	25	2.5328×10^4
40	29	14	6.1204×10^3

表 4.6　相関係数が 0.5 の場合

S/N	反復回数	最適回数	条件数
-20	1	1	1.4866×10^3
-10	2	1	4.9190×10^3
0	3	2	4.9190×10^3
10	5	3	6.56701×10^4
20	9	16	6.56701×10^4
30	16	29	1.2801×10^3
40	29	12	1.78000×10^3

表 4.7 相関係数が 0.9 の場合

S/N	反復回数	最適回数	条件数
-20	2	3	2.7426×10^6
-10	3	4	2.7426×10^6
0	5	4	2.7426×10^6
10	8	6	2.7426×10^6
20	13	8	4.3136×10^3
30	22	11	1.5807×10^5
40	37	17	1.9300×10^6

表 4.8 相関係数が 0.999 の場合

S/N	反復回数	最適回数	条件数
-20	7	8	2.7359×10^9
-10	10	13	2.7359×10^9
0	14	17	9.3713×10^6
10	20	13	3.7664×10^6
20	29	19	9.3713×10^6
30	43	23	2.0743×10^5
40	64	68	2.0743×10^5

4.2.3 評価

条件数の観測から，誤差の増大には 2 通りの原因があることが分かった．一方は，条件数が小さく，反復回数が最適回数を上回ってしまった場合である．このときは，多すぎる反復

によって誤差の増大を招いてしまった．そのため，誤差を軽減するには反復回数を減少させることで対応できる．もう一方は，条件数が大きく，反復回数が最適回数に足りなかった場合である．このときは，誤差減少の最中に反復回数が停止してしまったことになる．そのため，反復回数を増やすことで誤差が最小になるまで反復させることが必要である．

すなわち，誤差を減少させるため，誤差増大の原因に応じた反復回数の変化が求められることになる．しかし，上の 2 通りの場合以外には，反復回数の平均値を用いることができる．

第 5 章

最適反復回数の検討

5.1 はじめに

4.2 では，誤差軽減のために誤差が増大した行列の条件数と増大しなかった行列の条件数を比較した．その結果，誤差軽減における条件数の大きさと反復回数，最適回数には関連性が認められた．

本章ではこれを明らかにするため S/N を 30dB にしぼり，条件数と最適反復回数に着目して検討する．

5.2 条件数と最適反復回数

このとき，**3.3** で示した誤差の最大値に注目する．S/N が 30dB のとき，各相関係数の違いによって誤差の最大値を出した行列を抽出する．ここで，取り出された行列の条件数と最適反復回数を比較する．

ただし，以下の図 5.1 の横軸は，抽出した行列の条件数を常用対数で表したもの，縦軸は最適反復回数を示している．

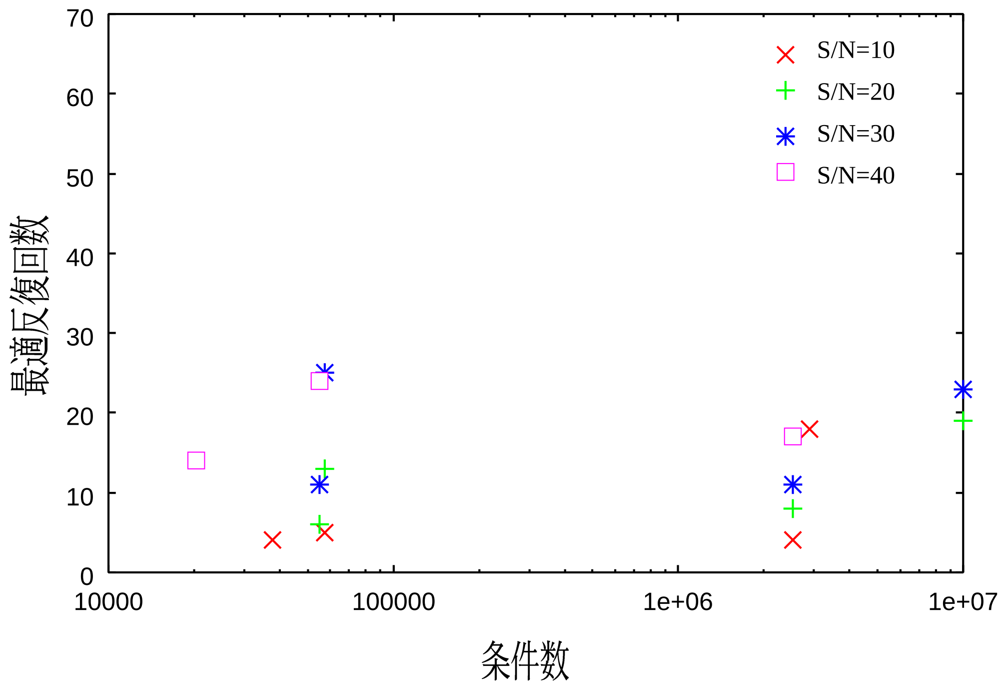

図 5.1　条件数による反復回数の評価 1

5.2.1　結果

図 5.1 によると，抽出した行列は 2 つに分かれ，条件数が大きいものと小さいものに分類された．10^5 を堺目に分かれるような傾向が見られため，条件数によって反復回数を上下することで最適反復回数を決めることができると予想される．

しかし，データが少ないため，相関係数が 0.9，S/N が 30dB のとき，誤差が 0.01 より大きいものに限定して条件数を調べる．

5.3　最適回数の決定にむけて

条件数によって 2 種類の原因が分かり、それに応じて反復回数を上下することで最適反復回数を決定できるとわかった．しかし、これを適応するといくつかの試行を繰り返すことによって最適反復回数をみつけなければならない．そのため，最適反復回数をみつけることに時間を要するため，効率的とは言えない．そのため，図 5.2 によって抽出された行列の傾向をもとに，これに回帰直線を引くことによって反復回数の予想が効率的にできるように検討

する．

まず，誤差の大きい行列に限って条件数，最適回数を調べた．このとき，データをより多く得るため，今回は，2,000 回試行をさせ，最小 2 乗法 (付録 B 参照) によって回帰直線を検討する．

これを，以下の図 5.2 によって示す．

ただし，横軸は条件数を常用対数で表し，縦軸を最適反復回数とする．

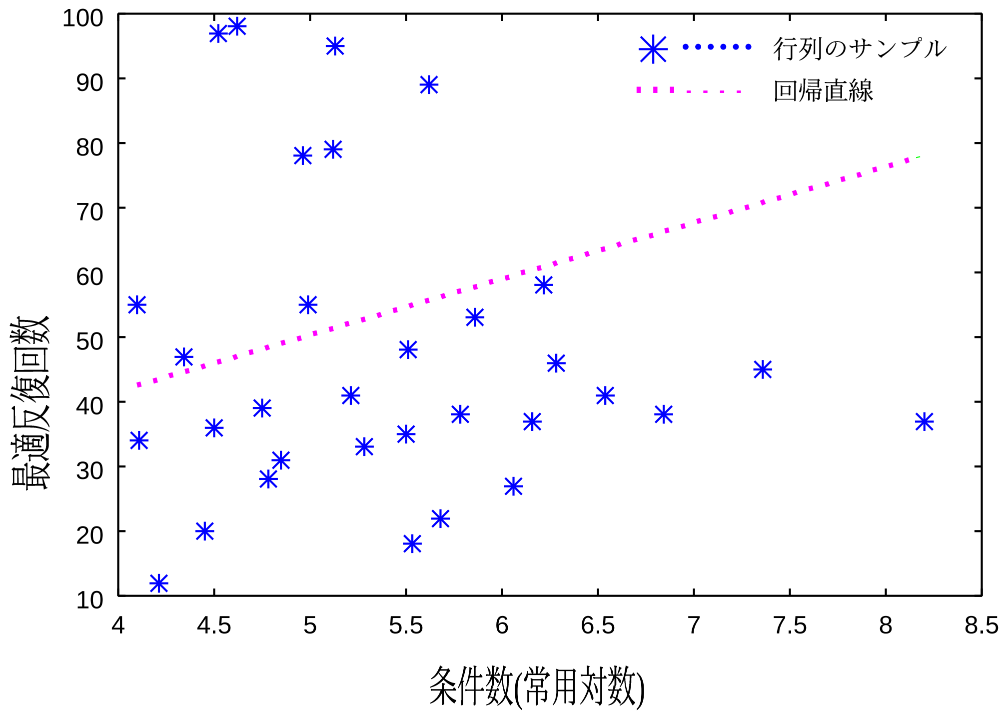

図 5.2　条件数による反復回数の評価 2

5.3.1　近似直線算出の結果

図 5.2 によると，抽出した行列は中央に多く点を集める結果となり，回帰直線は、図のほぼ中央をなめらかに通った．そのため，これをもとに最適反復回数を予想でき，誤差を軽減することも可能になると考えられる．

5.4　反復回数の予想

回帰直線によって反復回数の予想をおこなう．これが，誤差を軽減できるかを明らかにするため，図 5.2 を調査する．このとき，回帰直線の示した反復回数を試行させる．また，誤差が大きかった行列において，予想反復回数を反復させたときの誤差と，平均反復回数を反復させたときの誤差を比べ減少しているかを調べる．

表 5.1 に，その一部を示す．

ただし，表の最適反復回数，平均反復回数による誤差については，

- 最適反復回数

  図 5.2 によって示される各行列の最適反復回数である．

- 平均反復回数による誤差

  $2,000$ 回の試行によって，最適反復回数の平均値 24 が算出される．これを，$2,000$ 回反復させて得られた誤差の平均値である．

とする．

表 5.1　誤差の評価

反復回数		誤差	
予想反復回数	最適回数	予想反復回数による誤差	平均反復回数による誤差
46	36	0.0062	0.0137
45	47	0.0061	0.0189
58	53	0.0317	0.0792
71	45	0.0310	0.0590
48	39	0.0010	0.0288
43	12	0.0075	0.0337
56	89	0.0133	0.0490
60	37	0.0050	0.0012
50	78	0.0404	0.0239

5.4.1　結果

表 5.1 によって，回帰直線による反復回数の予想が誤差を減少させることができることがわかった．そのため，誤差が増大するときは，条件数，回帰直線に着目して反復回数を決めることで，誤差を減少させることができると考えられる．

第 6 章

結論

6.1 結論

共役勾配法では，最適反復回数を求める際，誤差の影響を受けやすい．しかし，条件数の観測によって誤差増大の原因と軽減の方法をみつけ，最適反復回数を決める方法を提示できた．

すなわち，原因に応じて最適反復回数を上下することで誤差を軽減し，最適反復回数を決めることが可能になった．

また，どれくらいの条件数を目安に反復回数を上下するかを **5.2**，**5.3** によって調査した．その結果，条件数の 10^5 位が目安だと考えられる．さらに，誤差の大きい行列に限り条件数と，最適反復回数を評価して回帰直線を算出した．これによって，ある程度の反復回数の予測が可能となった．この反復回数の予測によって，誤差の減少を目的とした反復回数決定の傾向はつかめた．しかし，反復回数を決めるにはいくつかの試行を繰り返すことが必要とされ，効率的な反復回数の決定法まで指針できなかった．

また，回帰直線による反復回数の予想では，誤差が最適反復回数の平均値を反復させたときより減少することがわかった．

6.2 今後の課題

本研究では，最適反復回数の求め方を検討した．最も誤差の少ない最適反復回数は，条件数をもとに，最適反復回数と反復回数を比較することによって見つけることができた．また，

6.2　今後の課題

条件数とそれをもとに描いた回帰直線によって誤差を減少する反復回数を予想できることがわかった．しかし，最も誤差の少ない反復回数に至るまでには何度かの試行を繰り返す必要がある．

そのため，効率良く，最適な反復回数を決定することが今後の課題と言える．

謝辞

本研究を行うにあたり，御指導ならびに御助言を頂いた高知工科大学情報システム工学科の福本昌弘助教授に深く感謝致します.

また，本研究を審査してくださる島村和典教授，坂本明雄教授，情報システム工学科の先生方に心より感謝致します.

さらに，本論文を完成させるにあたり秋山由佳様には，大変お世話になりました．また，菊池研究室の舟橋釈仁様，坂本研究室の登伸一様，篠森研究室の平山正治様に深く感謝致します.

最後に，共に助け合った研究室の皆様，篠森研究室の谷口沙織様，菊池研究室の川西志穂様をはじめ，高知工科大学情報システム工学科の友人達に感謝致します.

参考文献

[1] 辻井重男，適応信号処理，昭晃堂，1995

[2] 山本真弘，“共役勾配法における誤差の評価とその軽減，” 平成 13 年度高知工科大学学士学位論文,2002

[3] 戸川隼人，共役勾配法，教育出版，1997

[4] 洲ノ内治男，数値計算，サイエンス社，1978

[5] 堀ノ内總一，酒井幸吉，榎園茂，数値計算法入門，森北出版株式会社，2002

[6] 谷萩 隆嗣，デジタル信号処理と基礎理論，コロナ社，1998

[7] 長谷川里美，長谷川秀彦，藤野清次 ，反復法 Templates，朝倉書店，1996

付録 A

条件数

条件数は，方程式の解の不安程度を計る尺度として，用いられる．一般的に条件数は 10^4 以上が方程式として解きにくく，悪条件と言われている [3].

しかし，本研究の場合，S/N として雑音が付加されており，10^4 以上が必ずしも悪条件とは言えない．これについては，論文中で調査している．

正定値行列の場合，行列 A が正定値対称行列であれば，

$$cond(A) = \frac{A\text{ の最大固有値}}{A\text{ の最小固有値}} \tag{A.1}$$

となる．

固有値とは，複素線形空間 V に対して，行列 A を V 上の線形変換を表すものとする．このとき，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる複素 λ と，$\boldsymbol{x}\ (\neq 0) \in V$ が存在するとき，λ を行列 A の固有値と言う．

付録 B

最小 2 乗法

本研究では，回帰直線の算出のため，最小 2 乗法を使用する．

最小 2 乗法とは，データ点の近くを通るなめらかな関数を求める一つの方法である．本研究のように，誤差を含むデータに対しては，それらのデータ点を正確に通ることはあまり意味がないとされる．それよりも，平均的になめらかな近似式を求める [5].

そこで，与えられたデータ点を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ とする．

いくつかの基本になる関数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ を指定し，

$$y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_k f_k(x) \tag{B.1}$$

とおく．

これに最小 2 乗法を適用して，未係数 $a_1, a_2, \cdots a_k$ を定めるには，正規方程式

$$A^T A x = A^T b \tag{B.2}$$

より，x を求める．