

平成14年度卒業論文

## 2 サイクルディーゼル機関の急速負荷上昇

平成15年2月28日

高知工科大学 工学部 知能機械システム工学科

溝淵 高行

船築 知宏

指導教員 教授 磯村 修一

## 目次

緒言		3
第 1 章	エンジン・シミュレータの開発の背景、必要性	3
第 2 章	エンジン動特性の数式モデル	5
2 . 1	燃料系	7
2 . 2	燃焼系	8
2 . 3	過給機系	6
2 . 4	給気系	9
2 . 5	機関回転系	9
第 3 章	エンジン制御系モデル	10
3 . 1	エンジンの数式モデル	10
3 . 2	制御システムの数式モデル	10
3 . 3	エンジン制御システムのブロック線図	11
第 4 章	シミュレーションプログラム	12
第 5 章	シミュレーション結果	16
第 6 章	負荷急上昇対策案	18
結言		20
謝辞		21
参考文献		21
付録	等エントロピーの流れについて	22

## 緒言

ガスタービン発電に比べ、燃費の優れたディーゼル発電は、急激な負荷上昇要求に対する追従性において劣っているといわれている。本研究はその原因が掃気系のポジティブフィードバックにあり、主に

- 1．過給機の追従性による出力上昇の遅れ。
- 2．排気ガス圧力急上昇に伴う掃気の遅れ。

に起因されることをシミュレーションにより確認した。さらに、この問題を解決するためのいくつかの提案、検討をおこなった。

## 第1章 エンジン・シミュレータ開発の背景、必要性

シミュレーションの目的、考え方、手法は具体的な事象により様々であり、シミュレーションが必要になるのはシステムが複雑なときである。単純な道具の機能やプロセスについては人間の通常の経験的知識によって十分である。しかし、様々なプロセスが複雑に絡み合う事象になると、通常の人間の訓練による判断では事態を正しく認識する事が難しくなり、判断にしばしば重大な誤りが発生する。ここにシミュレーションの必要性が発生してくる。主なものを挙げてみると、

- 1．安全性確保、危険回避のため
- 2．経済性確保、効率化達成のため
- 3．経済動向の将来予測のため
- 4．自然現象の予測のため
- 5．機器、装置の設計のため
- 6．自然科学、社会科学系の研究、事象の理解、教育のため

などが挙げられる。これらのことより、今後ますますこのようなシミュレーション技術が必要となってくると思われる。

本研究の対象であるレシプロエンジンやガスタービンエンジンは自動車、船舶、航空機などに採用されており、その高性能化の要求、環境基準などは次々にクリアされ20世紀にはほぼ完成の域に達しており、もはや研究テーマは残されていないのではないかと考えられていた。ところが、電力自由化でビルや家庭向けなどの分散型発電機の需要が高まった。

発電用ディーゼルエンジンは50Hzあるいは60Hzの発電機との対応から、一般には3600, 3000, 1800, 1500, 1200, 1000rpmなどの定まった回転数の仕様が特色で使用目的によって常用発電機と非常用の仕様がある。

常用、非常用ともに信頼性が最も重要であり、次にそのエネルギーの質の点でも所定の

周波数の精度を左右するエンジンの回転数の制御性、ことに負荷変動に対する応答性が厳しく要求される。また非常用においては、緊急事態における急速起動、負荷投入が常に要求されており、信頼性の要求が一段と厳しいものである。

加速性能に優れたマイクロガスタービンが発電用として有力といわれる中、低価格燃料、高効率で優位に立つレシプロエンジンの最大のネックはその加速性にある。現在のレシプロエンジンは効率向上のために必ず排気ガスターボチャージャー（過給機）を装備しているが、負荷上昇時に限り過給機の追従遅れのため、出力上昇が追いつかず、発電機の回転数が低下してなかなか回復しないという問題が予測される。そのためビルや家庭の電源周波数が 60Hz（又は 50Hz）から低下し電力系統におけるさまざまな悪影響が予測されるのである。

そこで、今回は、急速負荷上昇を妨げる要因を明らかにするため、過給機による掃気系のフィードバックを含む、エンジンシステムの動特性シミュレーションを行うとともに、過渡特性を改善する対策について考察した。

## 第 2 章 エンジン動特性の数式モデル

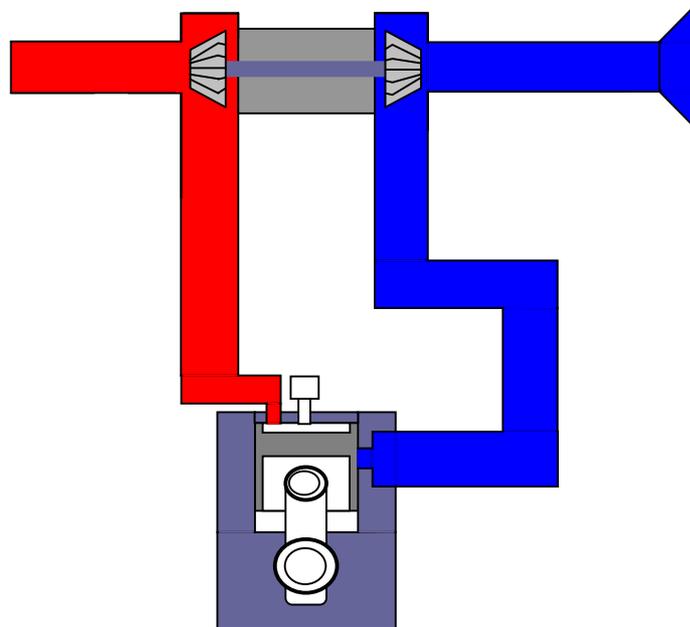


図 1 機関図

本研究ではエンジンや過給機のフィードバック効果を考慮して、負荷急上昇要求に対する機関系の過渡特性について述べる。

Full turbo charged Diesel engine において、瞬時に負荷を投入するような場合には調速機が燃料をフルに供給しても、慣性を持った過給機系統の遅れのため、ただちに給気が追従しないので、空気不足のため、燃焼にあずかる燃料は飽和し、機関出力は空気だけに依存することになるので、図 2 のように過給機の特性を考えた機関動特性について検討する。

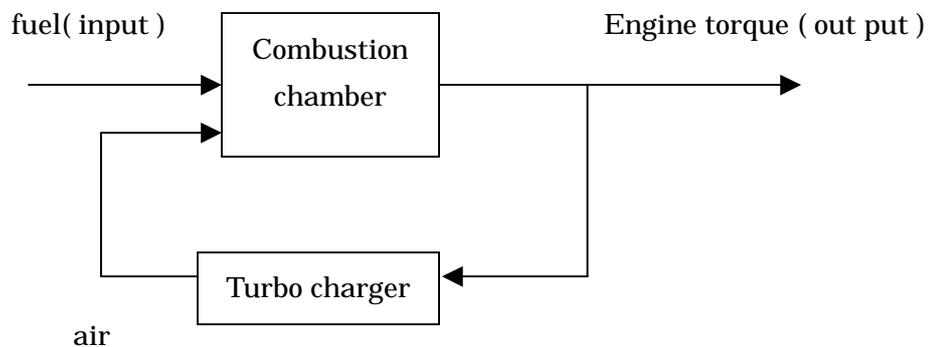


図 2 Block diagram for combustion chamber with turbo charger -2

またエンジンの出力には無駄時間がある。その無駄時間は以下のようにして求めることができる。

回転数  $N$ 、角速度  $\omega$  とすると

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} \quad 2 - 1$$

周波数  $f$ 、周期  $T$  とすると

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{N}{60} = \frac{1}{T} \quad 2 - 2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \times 60}{2\pi N} = \frac{60}{N} \quad 2 - 3$$

ここで、 $N = 240$  (rpm) とすると、

$$T = \frac{60}{240} = 0.25 \text{ (sec)}$$

となり、最大無駄時間は  $0.25$  (sec) となる。これより、平均無駄時間は  $0.125$  (sec) となる。ここでの無駄時間を  $t$  とする。図 3 に 1 シリンダー時の無駄時間を示し、図 4 に 6 シリンダー時の無駄時間を示す。

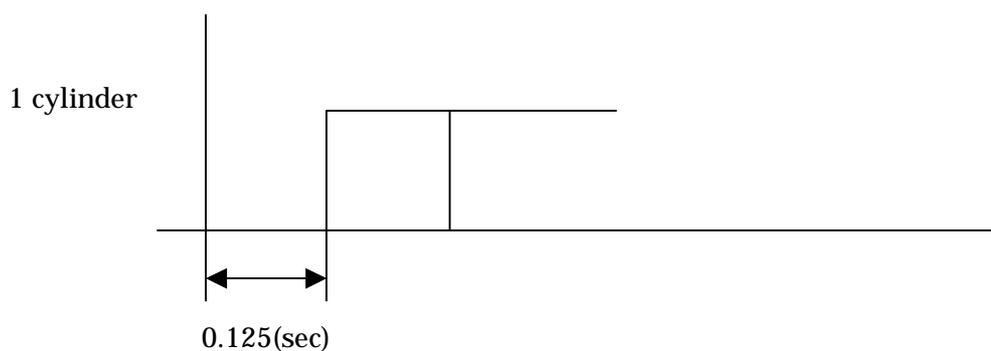


図 3 1 シリンダー時の無駄時間

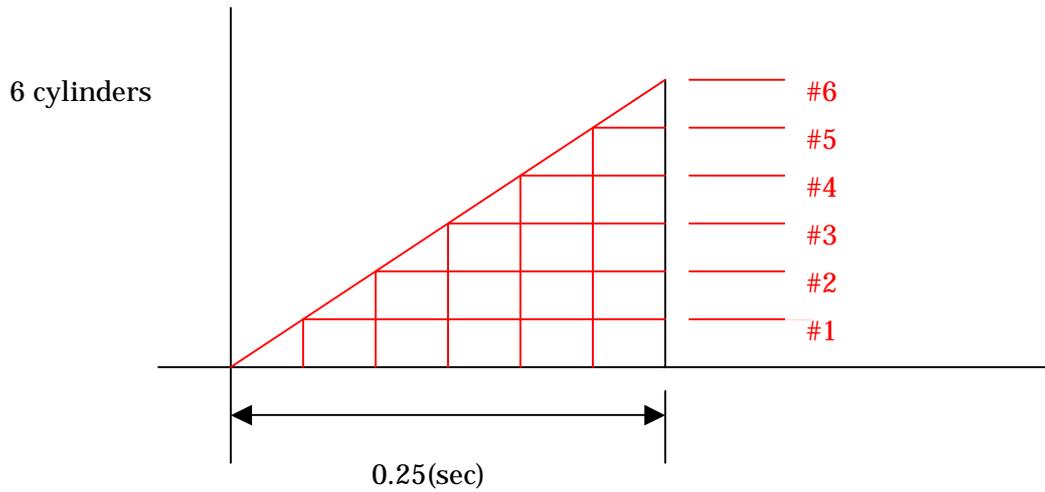


図4 6シリンダー時の無駄時間

また、図2のような機関を制御的な立場から、燃料系、燃焼系、過給機系、給気系、機関回転系に分割して各々の数式モデルを作成する。

## 2.1 燃料系

燃料ポンプおよび弁の特性は、弁内の遅れを無視し、燃料  $\text{fuel\_flow}$  は機関回転数  $\text{rpm}$  と燃料ポンプラグ変位  $X_R$  との関数として

$$\text{fuel\_flow} = f(X_R, \text{rpm})$$

と表され静特性を図5のように関数近似して求める。

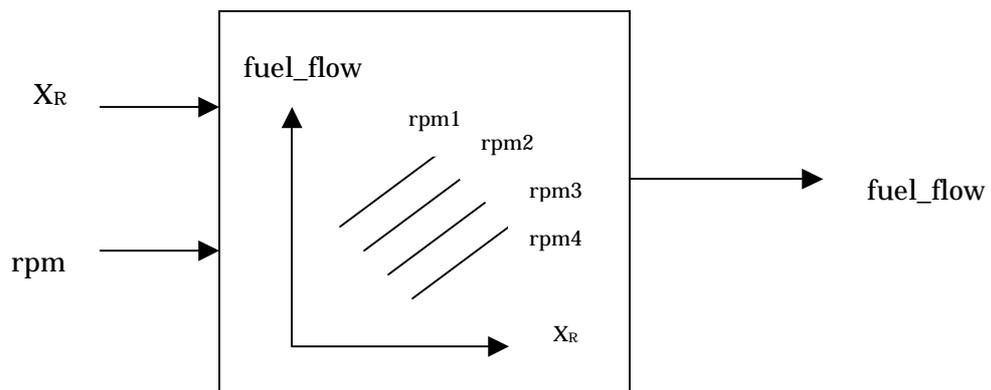


図5 Fuel pump characteristics

## 2.2 燃焼系

燃焼系への入力は、燃料 fuel\_flow、空気 air\_flow で、出力は排気ガス gas\_flow である。

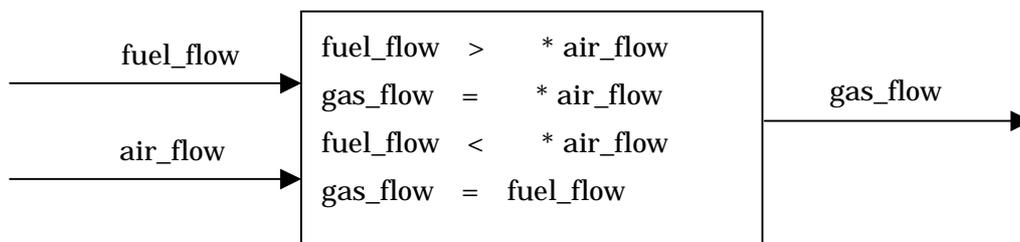


図6 Block diagram for Combustion chamber

燃料 fuel\_flow は空気過剰率 によって制限され、 1.3 で飽和し始める。したがって、燃焼系の伝達特性は図6のように によって fuel\_flow に制限を設ける飽和特性で表現する。

## 2.3 過給機系

過給機系は、燃焼室( Combustion Chamber )へ掃気を供給する。掃気トランク、air cooler 、送風機、排気タービン、排気管がシリーズになってガスタービン制御系である。ここでは、簡単のため次のような仮定のもとに数式モデルを作る。

まず、タービンおよび送風機内部の gas flow に関しては遅れを無視し、回転部分の慣性のみを考え、管系については、集中容量系として状態変化、mass、heat balance の式より次式が求められ、伝達関数が求まる。

$$\tau_B \frac{d}{dt} \text{air} = \text{torque} - \text{air}$$

ここで、 $\tau_B$  : 過給機時定数、air : 送風量、torque : 機関出力トルク

排気タービンおよび送風機の動作点に関しては、各々の単独特性が過渡状態においても成立と仮定し、決定する。

## 2.4 給気系

シリンダー内は等エントロピー流れとすると、次式が求められ、伝達関数が求まる。

$$\tau_c \frac{d}{dt} \text{air\_flow} = \text{air} - \text{air\_flow}$$

ここで、 $\tau_c$  : シリンダー時定数、air\_flow : 空気量とする。

## 2.5 機関回転系

機関回転系の状態方程式は次式となり、これより伝達関数は求まる。

$$\tau_a \frac{d}{dt} \text{rpm} = \text{torque} - \text{load} - \text{loss}$$

ここで、 $\tau_a$  : 機関時定数、load : 負荷トルク、loss : 損失トルク

## 第3章 エンジン制御系モデル

ディーゼル機関は、その特性上の問題から用途に応じた调速機を常備している。その特性は見かけ上の内部抵抗を持つ定トルク形動力源として評価できる。しかし、この負性の内部抵抗ゆえに機関運転の安定性が損なわれるため、ディーゼル機関が调速機無しにはほとんど実用化されないわけである。このために発電機の出力電圧、周波数をも考慮しなければならない。

本研究では调速機は基準回転数と機関の回転数の差を入力とし、燃料を出力とする簡略化したモデルを作成し、最適制御を行う。

### 3.1 制御油圧サーボの数式モデル

$$\tau_h \frac{d}{dt} X_R = \text{fuel\_flow\_demand} - X_R$$

ここで、 $\tau_h$  : 油圧サーボ時定数、fuel\_flow\_demand : 制御入力とする。

### 3.2 制御システムの数式モデル

制御システムの数式モデルは以下のようにする。

gain は調定率  $\delta$  とすると

$$\text{gain} = \frac{1}{\delta}$$

となる。調定率 は実験より 4% となり、gain は 2.5 となる。

rpm0 : 基準回転数、rpm : 機関回転数とすると、

$$\text{fuel\_flow\_demand} = \text{gain}(\text{rpm0} - \text{rpm}) \quad 3 - 9$$

となり、deviation : 逸脱、 $X_R$  : 燃料ポンプラグ変位とすると、

$$\text{deviaton} = \text{fuel\_flow\_demand} - X_R \quad 3 - 10$$

となる。絞り量を  $\Delta Z$  とすると、

$$\Delta Z = \text{deviation} \quad 3 - 11$$

となる。ここで、 $\Delta Z < Z_{\min}$  ならば、

$$\Delta Z = Z_{\min} \quad 3 - 12$$

となり、 $\Delta Z > Z_{\max}$  ならば、

$$\Delta Z = Z_{\max} \quad 3 - 13$$

となる。 $\tau_h$  : 油圧サーボ時定数、control : 制御量とすると

$$\tau_c \frac{d}{dt} \text{control} = \Delta Z \quad 3 - 14$$

となる。また、

$$X_R = \text{control} \quad 3 - 15$$

となり、 $\text{control} < \text{control}_{\min}$  ならば、

$$X_R = \text{control}_{\min} \quad 3 - 16$$

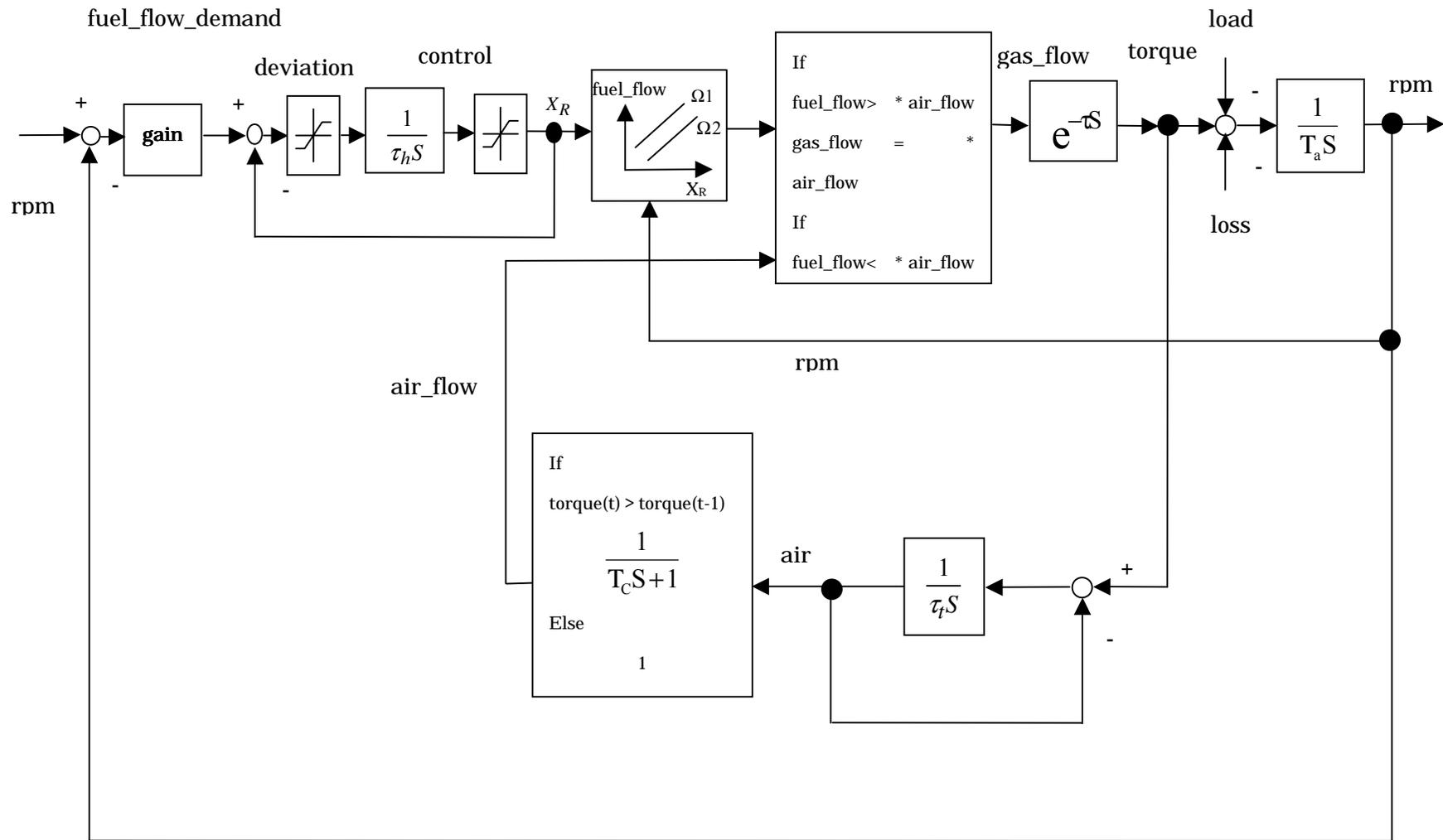
$\text{control} > \text{control}_{\max}$  ならば、

$$X_R = \text{control}_{\max} \quad 3 - 17$$

となる。

### 3.3 エンジン制御システムのブロック線図

3.1、3.2の数式より伝達関数を求め、図7のようなエンジン制御システムブロック線図が得られた。



☒ 7 Block Diagram for Diesel Generation System

## 第4章 シミュレーションプログラム

コンピューターはノート型パソコン ( TOSHIBA DynaBook Satellite2060 ) で、OS は ( Windows98 Second Edition )、言語プロセッサは Microsoft Visual C++6.0 である。

3 . 1、3 . 2 の連立微分方程式で表された数式モデルを解くプログラムを作成した。

プログラムリストを下記に示す。

```
double delay[3000];
double x[nmax],xm[nmax],f[nmax],u[nmax],ti,t,dti,tend,dt;
int n,count,delay_count;

void initialize(){
    n= 4;
    x[1]=1.0;
    x[2]=1.0;
    x[3]=1.0;
    x[4]=1.0;
    t = ti;
    dt=dti;
}

void derivs(double t,double x[],double f[]){
    double rpm0=1.04;
    double Tt=5.0;
    double Ta=2.0;
    double gain=25.0;
    double Tc=0.1;
    double Th=0.1;
    double delta_z=0.5;
    double upper_limit=1.1;
    double loss=0.1;
    double lower_limit=0.0;
    double excess_air_ratio=3.5;
    double control=x[1];
    double air=x[2];
    double air_flow=x[4];
```

```

double rpm=x[3];
double gas_flow;
double load=0.9;
double torque=1.0;
double delay_time=0.04;
delay_count=(int)(delay_time/dti);
if(t>1.0){
    load=0.0;
}
if(t>10.0) load=0.9;
double fuel_flow_demand=gain*(rpm0-rpm);
double Xr=control;
double deviation=fuel_flow_demand-Xr;
if(deviation<=-delta_z) deviation=-delta_z;
if(deviation>= delta_z) deviation= delta_z;
f[1]=deviation/Th;
if(control>=upper_limit) Xr=upper_limit;
if(control<=lower_limit) Xr=lower_limit;
double fuel_flow=Xr;
if(fuel_flow>=excess_air_ratio*air_flow) gas_flow=excess_air_ratio*air_flow;
if(fuel_flow<=excess_air_ratio*air_flow) gas_flow=fuel_flow;
delay[count]=gas_flow;
torque=gas_flow;
if(count>delay_count) torque=delay[count-delay_count];
f[2]=(torque-air)/(Tt);
if(torque>u[4]){
    f[4]=(air-air_flow)/Tc;
}else{
    f[4]=f[2];
}
f[3]=(torque-load-loss)/Ta;

u[1]=load;
u[2]=deviation;
u[3]=gas_flow;
u[4]=torque;

```

```

    u[5]=fuel_flow;
}
/*****
/*      Integration by Runge-Kutta Method for Crank      */
*****/
void rk4(double t,double dt,double x[],double xm[]){
    int    i;
    double xt[nmax],ft[nmax],fm[nmax];
    double h,hh,h6,th;
    h=dt;
    hh=h*0.5;
    h6=h/6.0;
    th=t+hh;

    derivs(t, x, f);
        for (i=1;i<=n; i++){
                xt[i]=x[i]+hh*f[i];
        }
    derivs(th, xt, ft);
        for (i=1;i<=n; i++){
                xt[i]=x[i]+hh*ft[i];
        }
    derivs(th, xt, fm);
        for (i=1;i<=n; i++){
                xt[i]=x[i]+h*fm[i];
                fm[i] +=ft[i];
        }
    derivs(t+h, xt, ft);
        for (i=1;i<=n; i++){
                xm[i]=x[i]+h6*(f[i]+ft[i]+2.0*fm[i]);
        }
        for (i=1;i<=n; i++) x[i]=xm[i];
}

```

## 第5章 シミュレーション結果

第4章シミュレーションプログラムに示したプログラムよりシミュレーションを作成した。シミュレーション結果を図8に示す。図8より、負荷急増時に空気量はなだらかな曲線のようにしか増加せず、エンジントルクは上昇に大変時間がかかり、回転数は大幅に落ち込んでいることが分かる。また、低負荷での空気過剰率を大きくした場合のシミュレーション結果を図9に示す。図9は図8に比べ負荷急増時の空気量の増加量は増え、エンジントルクの上昇時間は短縮され、回転数の落ち込みも減少している。

これらのことよりディーゼル機関の急激な負荷上昇要求に対する追従性の悪さが分かる。



図8 Block diagram for diesel generation system simulation 1

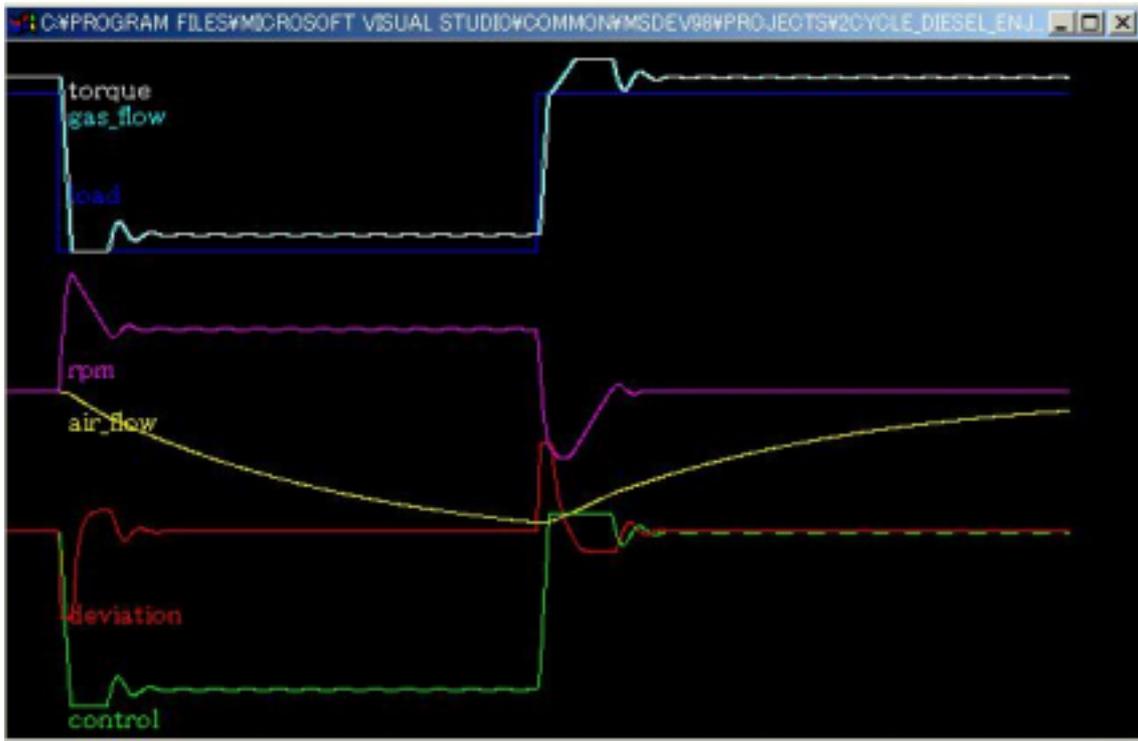


图 9 Block diagram for diesel generation control system simulation 2

## 第 6 章 負荷急上昇対策案

急速負荷上昇時に機関の追従を良くするため図 10 のように空気溜（ボンベ）のようなものを付け、一時的に空気を送り、空気不足を解消することを検討する。

空気溜のようなものの例として NOS（ナイトロオキサイトシステム）がある。NOS とは負荷上昇時に亜酸化窒素をエンジン内に供給し、エンジン内で亜酸化窒素が気化し高濃度な酸素を得ることで、通常より多くの燃料を燃やすことのできる装置で、現在カーレースなどで使用されている。

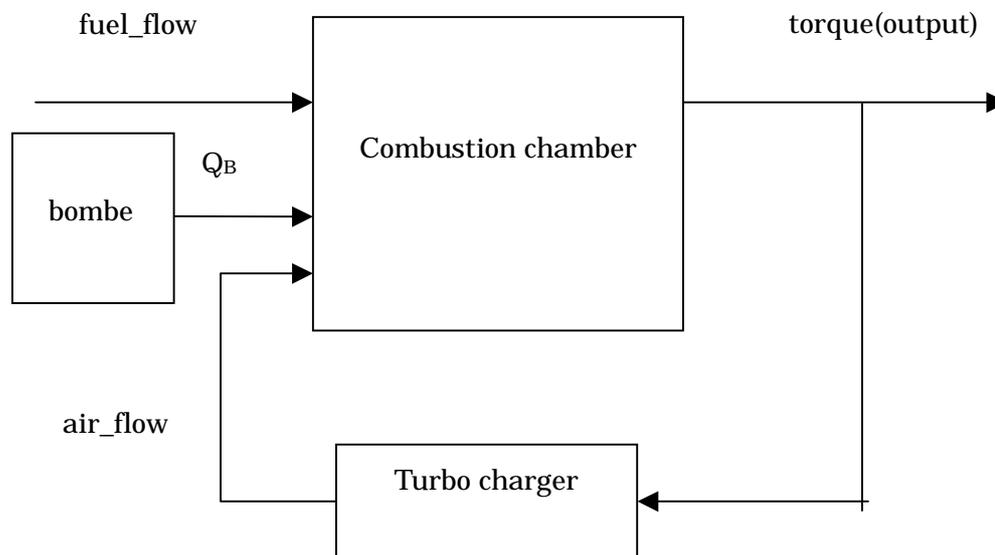


図 10 Block diagram for combustion chamber with turbo charger and air tank

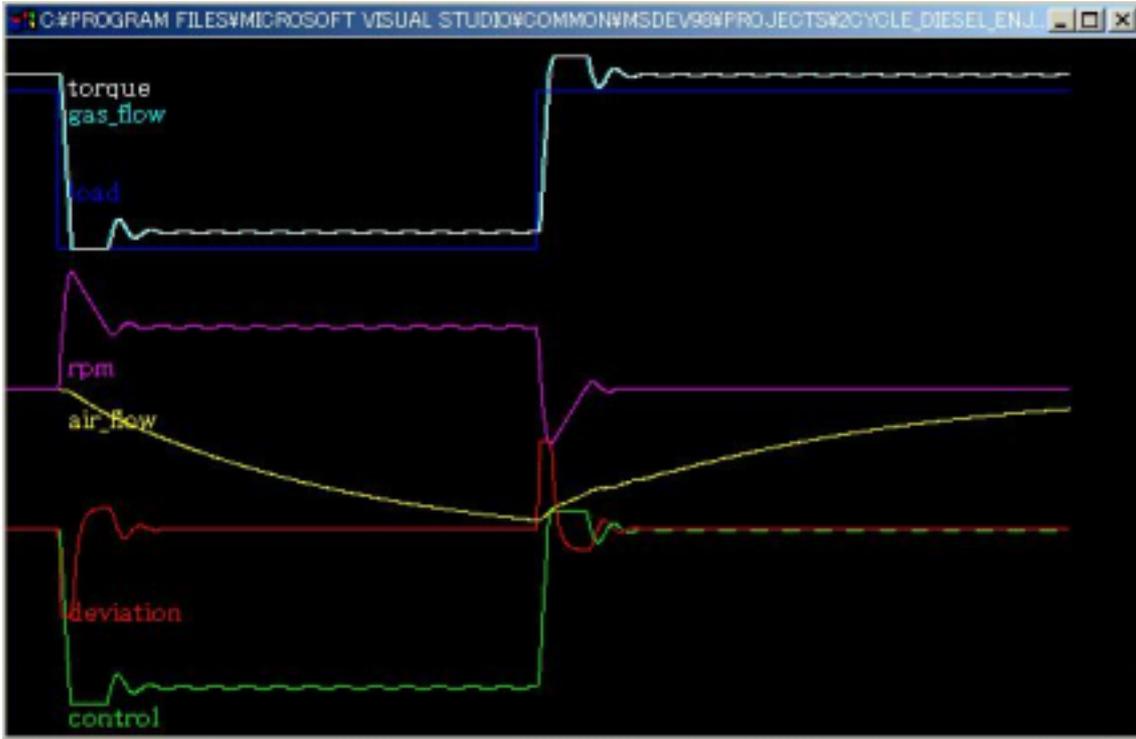
空気溜（ボンベ）の数式モデルを作成する。

空気溜（ボンベ）内は等エントロピー流れとすると状態方程式は

$$\tau_B \frac{d}{dt} P_B = -Q_B$$

ここで、 $\tau_B$ ：ボンベ時定数、 $P_B$ ：ボンベ内圧力、 $Q_B$ ：ボンベ内流量とする。

これを、2.4 給気系の数式モデルに組み込み、上記と同様にシミュレーションを作成した。シミュレーション結果を図 11 に示す。図 11 より、負荷急増時に空気量は大幅に増加し、エンジントルクの増加にかかる時間はさらに短縮し、回転数の降下も大幅に減少しており機関の追従性の向上が分かる。ただし、エンジンにチャージするエネルギー損失は避けられない。



⊗ 1 1 Block diagram for diesel generation control system simulation 3

## 結言

調速機を含む、2 サイクルディーゼル機関閉ループ系の解析を行い、以下のことが分かる。

- ・ 負荷投入の場合、調速機が燃料を増加しても、機関出力は過渡的には燃料に比例して増加しない。
- ・ 負荷の変化量が大きいほど、負荷減少時に比べて、負荷上昇時の回転変動量が大きい。
- ・ 燃料急増時に機関出力が追従できないのは、過給機の慣性による掃気の遅れが原因である。
- ・ 燃料増加によって排気エネルギーが一時的に増大するが、排気圧の上昇のため給気は一時困難となり、その回復は過給機の時定数によって決まる。

したがって、このような負荷変動に対して、機関の追従を良くし、回転の下降を防止するためには、以下のことが考えられる。

- 1 . 空気溜（ボンベ）をつける。
- 2 . 低負荷での空気過剰率大きくする。

本研究ではこの2つのことを提案し、検討した。空気溜（ボンベ）を付けることで、急速負荷上昇時に機関の追従は良くなり、回転の降下も抑えることとなる。

しかし、空気溜（ボンベ）は交換が必要なことなどを考慮すれば現実問題としてボンベの改良は必要不可欠だと考える。

## 謝辞

磯村研究室で開発された2サイクルディーゼル機関動特性研究を基に、本研究ではC言語を用いて動特性を把握するためのシミュレーションプログラムを開発した。

本研究を進めるにあたり、指導して頂いた磯村修一教授、共同研究者の船築知宏氏に感謝の意を表したい。

## 参考文献

- 1) 卒業論文「4サイクルガソリンエンジンの動特性について」  
下司 真也、佐々木 兵太  
高知工科大学 工学部 知能機械システム工学科 2000.2.28
- 2) 「内燃機関工学」  
栗野 誠一  
山海堂
- 3) 「エンジンの辞典」  
古浜 庄一、神本 武征、金 栄吉、大聖 泰弘、古山 幹雄、吉識 晴夫、  
渡部 栄吉  
朝倉書店

## 付録 「等エントロピーの流れ」

流体の流れは、ディフューザー、タービンなどのいくつかの熱力学装置によって、高い精度で一次元の等エントロピーで近似することができる。分散するノズルを集中させることは、蒸気やガスタービンを含む多くの技術に用いられている。開放領域で出口速度  $u$ 、流量  $m$ 、圧力  $p$  の影響を考慮すると、

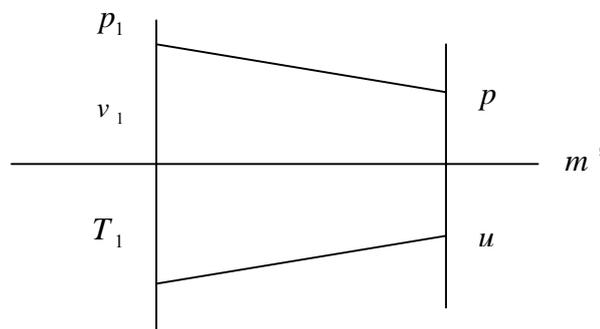


Fig.1 Converging nozzle

Fig 1 の中でノズル入口圧力  $P_1$ 、温度  $T_1$ 、体積  $V_1$ 、出口速度  $u$ 、流れの割合  $m$ 、圧力  $P$  とし、 $T_1$  と  $P_1$  は貯蔵所での温度、圧力と等しいので、ノズル入口速度が無視できる。

### ( 1 ) 熱力学第 1 法則

熱力学第 1 法則の関係は、

$$dq = de + dw$$

1

ここで、 $q$  : 熱エネルギー、 $e$  : 内部エネルギー、 $W$  : 仕事 とする。

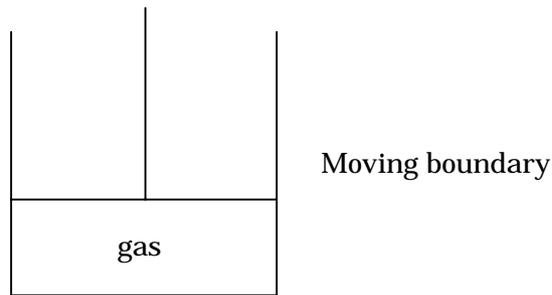


Fig.2 Piston-cylinder device

圧力  $P_1$ 、体積  $V$ 、比容積  $v$ 、断面積  $A$ 、ピストンが動く距離  $ds$  とすると

$$dw - pAds = pdV \quad 2$$

仕事  $dw$  は次の様に表すことができる。

$$dw = pdv \quad 3$$

よって、形式的に第1法則を得ることができる。

$$dq = de + pdv \quad 4$$

## (2) エンタルピーの定義コンビネーション特性

エンタルピーの定義よりエンタルピーシンボル  $h$  とすると、以下ようになる。

$$h = e + pv \quad 5$$

## (3) ならかな流体力学の合計

単純で圧縮可能な、ならかな流動性システムのエネルギーの合計は4部からなり、内部、仕事、運動、位置(ポテンシャル)エネルギーとなる。エネルギーの合計は、

$$q = e + pv + \frac{u^2}{2} + gz \quad 6$$

で表され、式[6]を式[5]に代入すると

$$q = h + \frac{u^2}{2} + gz \quad 7$$

となる。また、流動性が速いと、流体の位置エネルギーが無視できる。しかし、運動エネルギーはそうではない。よって、

$$q = \kappa + \frac{u^2}{2} \quad 8$$

となり、エネルギー保存則より、熱伝導は無視できるので、

$$dq = dh + udu = 0 \quad 9$$

となる。

#### (4) 理想気体の比熱関係

状態方程式とは物質に圧力、温度、および特定の体積を関連づける方程式である。ガス過程の物質用の最も単純でよく知られている方程式は理想気体の状態方程式である。

ここで、 $R$  : 気体定数、 $v$  : 比容積、 $T$  : 温度、 $p$  : 圧力とすると、理想気体の状態方程式は式[10]となる。

$$pv = RT \quad 10$$

#### (5) 比熱

比熱は物質の質量の温度を1度上げるのに必要なエネルギーとして定義されおり、熱力学では、2種類の比熱が必要で、定積体積 $C_v$ 、定圧比熱 $C_p$ の比熱は、熱力学第1法則より

$$dq = de + pdv \quad 4$$

エンタルピーの定義より

$$dq = dh - vdp \quad 11$$

定圧比熱の定義より

$$q = q(T) \quad 12$$

エネルギーは温度によって決まり、また、エネルギーは $C_v dt$ と等しい。

$$dq = \left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_v = C_v dt \quad 13$$

同様に、

$$dq = \left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_p = C_p dt \quad 14$$

式[4]より、ATは定積となり

$$dq = de \quad 15$$

同様に定圧とし

$$dq = dh \quad 16$$

よって、

$$C_V = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_V \quad 17$$

$$C_P = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_P \quad 18$$

となり、 $de$  は定積での温度による内部エネルギーの変化、 $dh$  は定圧での温度によるエンタルピーの変化を示す。

式[13]~式[18]より

$$de = C_V dt \quad 19$$

$$dh = C_P dt \quad 20$$

#### (6) 理想気体の比熱関係

理想気体の  $C_P$  と  $C_V$  の関係は式[5]、式[10]の区別により得る。

$$dh = de + pdv + vdp \quad 21$$

$$pdv + vdp = RdT \quad 22$$

式[21]、式[22]より

$$dh = de + RdT \quad 23$$

となり、式[19]、式[20]を代入して、 $dT$  で両辺を割ると

$$C_P dT = C_V dT + RdT \quad 24$$

$$C_P = C_V + R \quad 25$$

となる。これより、 $C_P$  および、気体定数  $R$  から  $C_V$  を決定することができる。ここで、比熱比率  $\kappa$  と呼ばれる別の理想気体を導入する。定義として、 $\kappa$  : 比熱比率とすると、

$$\kappa = \frac{C_P}{C_V} \quad 26$$

となる。式[24]、式[25]より

$$C_P = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \quad 27$$

$$C_P = \frac{1}{\kappa - 1} R \quad 28$$

と表すことができる。

(7) 熱力学第2法則

低温から高温まで熱の伝熱以外の影響を与えない装置を構築することは不可能である。熱力学第2法則はしばしば不平等を含んでいるが、不可逆熱機関は、例えば、同じ2つの熱エネルギーを貯蔵所間に作動する可逆的なものほど効率的ではなく、熱力学に主な結果を持っている別の不平等はクラウジウスの不平等を表現される。

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad 29$$

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad 30$$

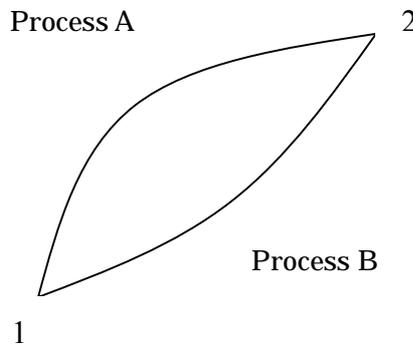


Fig.3 Reversible process

Fig.3 で式[30]を考えると

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad 31$$

となり、式[31]の最後の積分の範囲を逆にして均等を維持するそのサインを変更すると、

$$\int_1^2 \delta \left( \frac{Q}{T} \right)_A = \int_1^2 \delta \left( \frac{Q}{T} \right)_B \quad 32$$

となる。また、2つの平衡状態を結ぶ準静的可逆過程を考える。その過程の1部をなす小さな区間において、系が吸収または排出した熱量を  $dQ$  とする。この時、小さな間が結ぶわずかな異なる2つの平衡状態について、系に伝達された熱  $dQ$  を絶対温度  $T$  で割った量の系のエントロピー変化を  $ds$  と定義する。

$$ds = \frac{dQ}{T} \quad 33$$

$$ds = \frac{dq}{T} \quad 34$$

あるいは、

$$dq = Tds \quad 35$$

式[4]および式[1 1]に式[3 5]を代入すると式[3 6]、式[3 7]を得る。

$$Tds = de + pdv = 0 \quad 3 6$$

$$Tds = dh - vdp = 0 \quad 3 7$$

## ( 8 ) 純物質の等エントロピーのプロセス

固定多量のエントロピーが内部に可逆的断熱のプロセスの間変わらない場合これは、一定のエントロピーの変化である。多くのエンジニアリング・システム、ポンプ、タービンおよびノズルのような装置がそれらの作用において本質的断熱である。また、変化に関連した摩擦のような不可逆性が最小限にたくされる場合、それらは最良に実行される。等エントロピーのプロセス手段  $s = \text{定数}$  ( 同等物  $ds = 0$  ) は式[3 6]、式[3 7]に  $ds = 0$  を代入して得る。

式[1 9]、式[2 0]に式[3 6]、式[3 7]を代入すると

$$C_v dT + pdv = 0 \quad 3 8$$

$$C_p dT - vdp = 0 \quad 3 9$$

式[3 8]、式[3 9]より

$$\frac{C_p}{C_v} = -\frac{vdp}{pdv} \quad 4 0$$

となり、式[4 0]を式[2 6]に代入すると

$$\kappa = -\frac{v}{p} \frac{dp}{dv}$$

$$\frac{dp}{dv} = -\kappa \frac{p}{v}$$

$$\frac{dp}{p} = -\kappa \frac{dv}{v} \quad 4 1$$

となる。これは変数分離なので積分することができ、式[4 1]より断熱変化の式を得る。

$$\ln p = -\kappa \cdot \ln v + c$$

$$\ln p + \kappa \cdot \ln v = c$$

$$\ln p + \ln v^\kappa = c$$

$$\ln pv^\kappa = c$$

$$pv^\kappa = \text{constant} \quad 4 2$$

### (9) 理想気体の等エントロピーの速度

比熱比率  $\kappa$  について等エントロピーの速度と理想気体の圧力の関係を求める。流れが等エントロピーで、ガスが一定の比熱を持っていると考え、エネルギー保存則より

$$dh + udu = 0 \quad 9$$

等エントロピーのプロセスの第1法則より

$$Tds = dh - vdp \quad 37$$

式[9]に式[37]を代入、 $Tds = 0$ より、断熱の場合は

$$\begin{aligned} Tds + vdp + udu &= 0 \\ udu &= -vdp \end{aligned} \quad 43$$

となり、入口境界条件を  $p = p_1$ 、 $v = v_1$  とすると式[42]は

$$pv^\kappa = p_1 v_1^\kappa \quad 44$$

となるから

$$v = v_1 \left( \frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad 45$$

式[43]に式[45]を代入して

$$udu = -p_1 \frac{1}{\kappa} v_1 \frac{dp}{p^\kappa} \quad 46$$

となり、両辺を積分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u^2 &= -p_1^{\frac{1}{\kappa}} v_1 \int p^{-\frac{1}{\kappa}} dp \\ &= -\frac{1}{1 - \frac{1}{\kappa}} p_1^{\frac{1}{\kappa}} v_1 p^{1 - \frac{1}{\kappa}} + c \\ \frac{u^2}{2} &= -\frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1^{\frac{1}{\kappa}} v_1 p^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} + c \end{aligned} \quad 47$$

となる。入口境界条件として  $p = p_1$ 、 $u = 0$  より

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1^{\frac{1}{\kappa}} v_1 p_1^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} + c \\ c &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 \frac{1}{\kappa} v_1 p_1^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \end{aligned} \quad 48$$

となり、式[47]に式[48]を代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{u^2}{2} &= -\frac{\kappa}{\kappa-1} p_1^{\frac{1}{\kappa}} v_1 p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + \frac{\kappa}{\kappa-1} p_1^{\frac{1}{\kappa}} v_1 p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \\
&= \frac{\kappa}{\kappa-1} p_1^{\frac{1}{\kappa}} v_1 p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \\
&= \frac{\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \\
u &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}
\end{aligned}$$

49

となる。  $r = \frac{p}{p_1}$  とすると、流速  $u$  は

$$u = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left( 1 - r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)}$$

50

となる。ここで、流速と圧力の関係を Fig 4 で示す。

### (10) 等エントロピーの流量

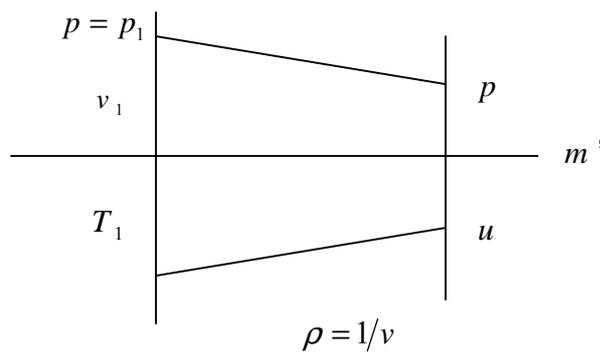


Fig. 5 Converging nozzle

Fig. 5 に示されるように  $m'$  : 流量、 $\rho$  : ノズル密度、 $F$  : ノズルの断面積とすると、

$$\dot{m} = \rho Fu \quad 5.1$$

となり、式[4.5]に  $\rho = \frac{1}{v}$  を用いて密度を表すと

$$\rho = p_1^{-\frac{1}{\kappa}} v_1^{-1} p_1^{\frac{1}{\kappa}} \quad 5.2$$

となる。式[4.9]、式[5.0]より

$$\begin{aligned} \dot{m} &= F p_1^{-\frac{1}{\kappa}} v_1^{-1} p_1^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \\ &= F \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{v_1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \\ &= Fr^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{v_1} \left( 1 - r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} \quad 5.3 \end{aligned}$$

となり、式[5.3]より

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad 5.4$$

となる。圧力比減少により流量は増加する。比率  $r$  が出口平面で流動性の速度  $u$  を音の速度に増加させると音速での比率  $r^*$  になる場合、多量流量  $\frac{dm}{dt}$  は最大値になる。このことを Fig 6 で示す。

しかしながら、流量は阻まれるので、同等物を区別する流量を得ることができる。これらのことを Fig 7 で示す。

式[5.3]より、圧力比率  $r = 0$  として、

$$\frac{d\dot{m}}{dr} = 0 \quad 5.5$$

$$\frac{d\dot{m}}{dr} = F \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{v_1}} \left( \frac{1}{\kappa} r^{\frac{1}{\kappa}-1} \sqrt{1-r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} - \frac{1}{2} r^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\kappa-1}{\kappa} r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}-1} \frac{1}{\sqrt{1-r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= F \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{v_1}} \left( \frac{1}{\kappa} r^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} \sqrt{1-r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} - \frac{\kappa-1}{2\kappa} r^{\frac{1}{\kappa}} r^{-\frac{1}{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{1-r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}} \right) \\
&= F \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{v_1}} \frac{1}{\sqrt{1-r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}} \left[ \frac{1}{\kappa} r^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left( 1-r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) - \frac{\kappa-1}{2\kappa} \right]
\end{aligned}$$

5 6

その時、 $\frac{dm}{dr} = 0$  より、

$$\frac{1}{\kappa} r^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left( 1-r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) - \frac{\kappa-1}{2\kappa} = 0$$

$$\frac{1}{\kappa} \left( r^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right) = \frac{\kappa-1}{2\kappa}$$

$$r^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 = \frac{\kappa-1}{2}$$

$$r^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa-1}{2}$$

$$r^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{\kappa+1}{2}$$

$$\frac{1}{r} = \left( \frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$r^* = \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

5 7

式[5 7]より、一定の流れを得ることができる。

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= F r^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{v_1} \left( 1-r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} \\
&= F \left[ \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right]^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{v_1} \left\{ 1 - \left[ \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right\}}
\end{aligned}$$

$$= F \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{v_1} \frac{\kappa-1}{\kappa+1}}$$

$$= F \sqrt{\left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{2}{\kappa-1}} \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_1}{v_1}}$$

$$m^* = F \sqrt{\kappa \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \frac{p_1}{v_1}}$$

5 8

式[5 0]に式[5 7]を代入すると、等エントロピーの速度を得る。

$$u = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left( 1 - r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left\{ \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right\}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left( 1 - \frac{2}{\kappa+1} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left( \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right)}$$

$$u^* = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} p_1 v_1}$$

5 9

これらのことを Fig 8 で示す。

理想気体の状態方程式、式[1 0]から比容積  $v_1$  を除くことで等エントロピーの速度と流量は表現される。

$$u = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} RT_1 \left( 1 - r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)}$$

6 0

$$\dot{m} = F \frac{p_1}{\sqrt{RT_1}} r^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \left( 1 - r^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)}$$

6 1

$$u^* = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} RT_1} \quad 6.2$$

$$\dot{m}^* = F \frac{p_1}{\sqrt{RT_1}} r^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\kappa \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}} \quad 6.3$$

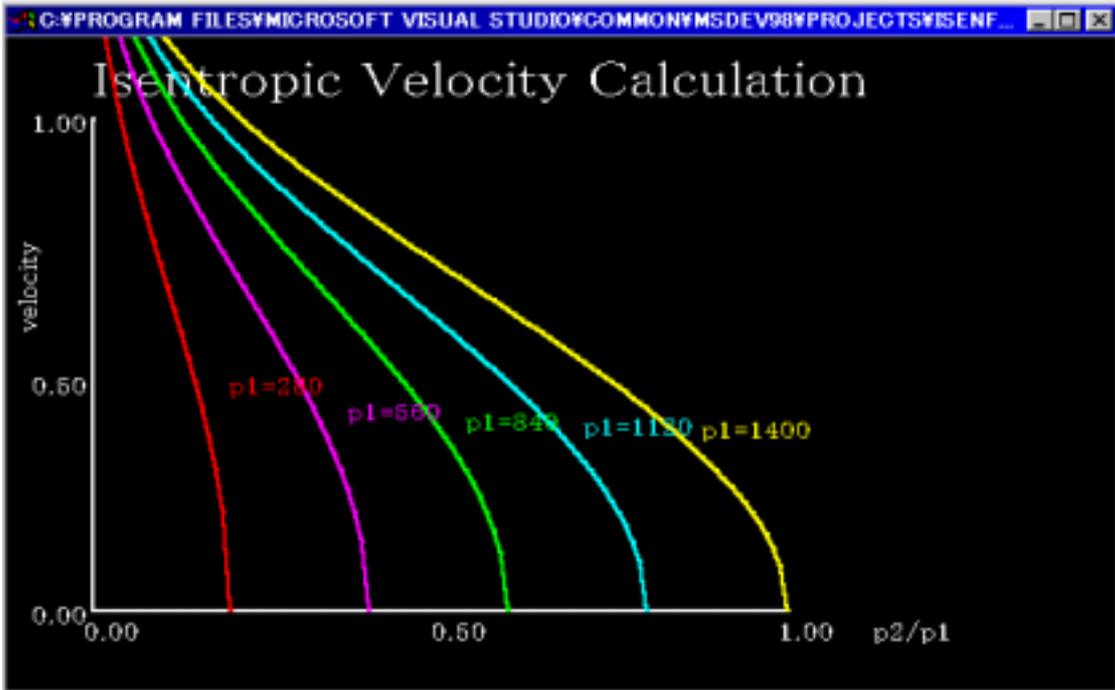


Fig4 Drawing Isentropic Velocity Calculation

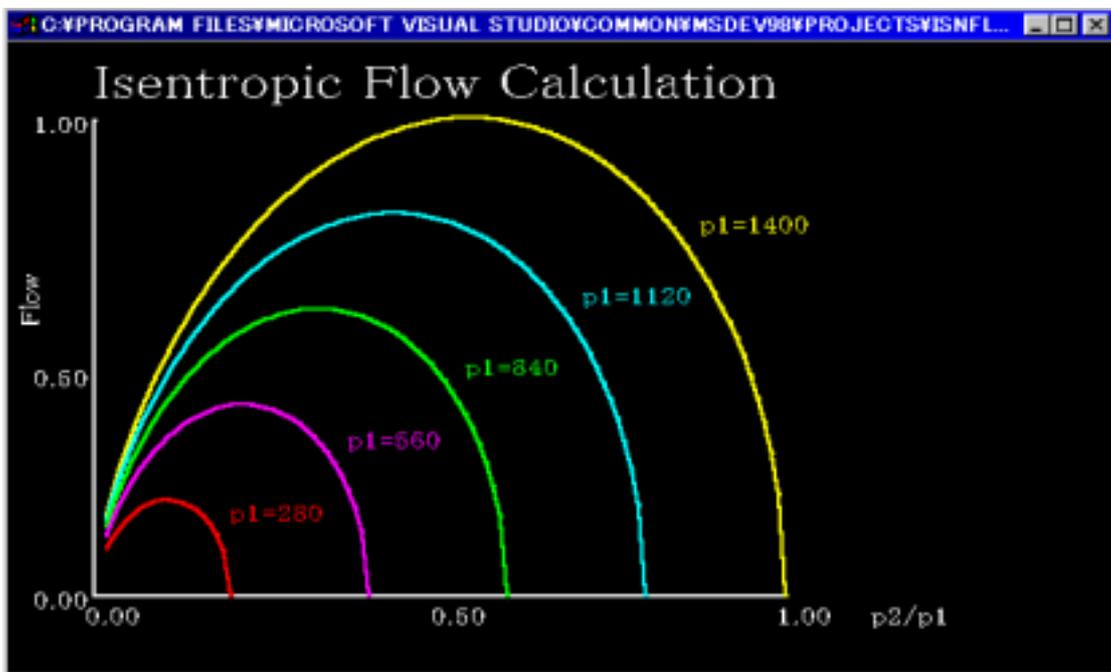


Fig6 Drawing Isentropic Flow Calculation

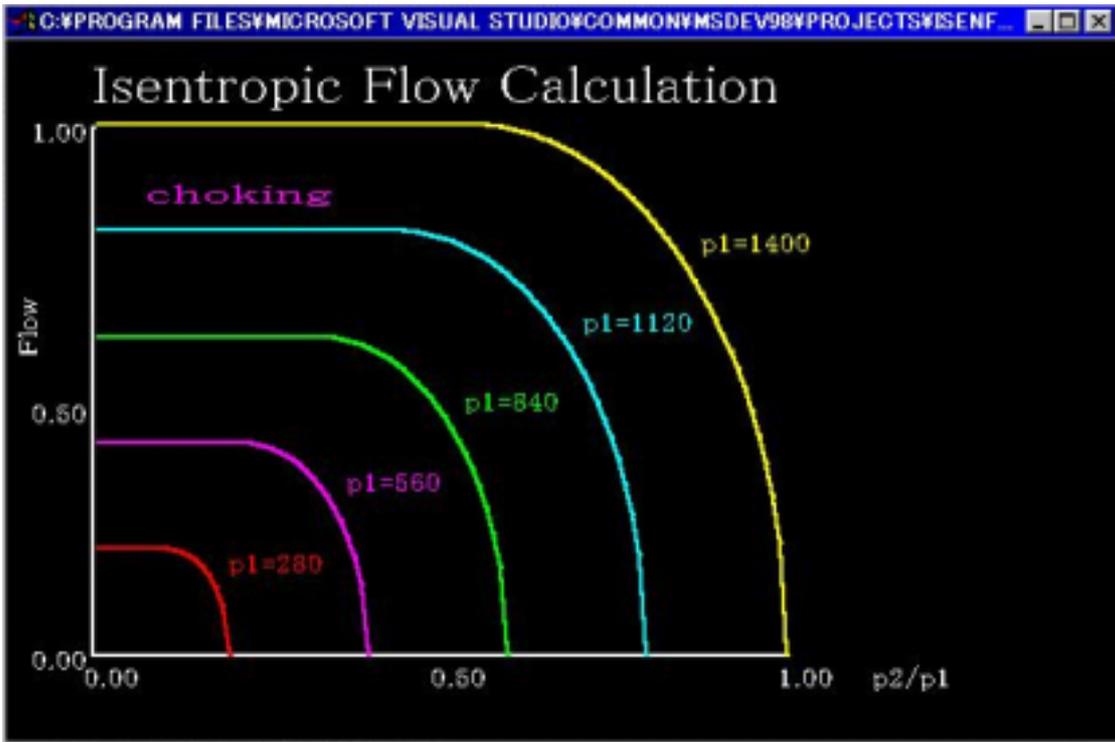


Fig7 Drawing Isentropic Flow Calculation

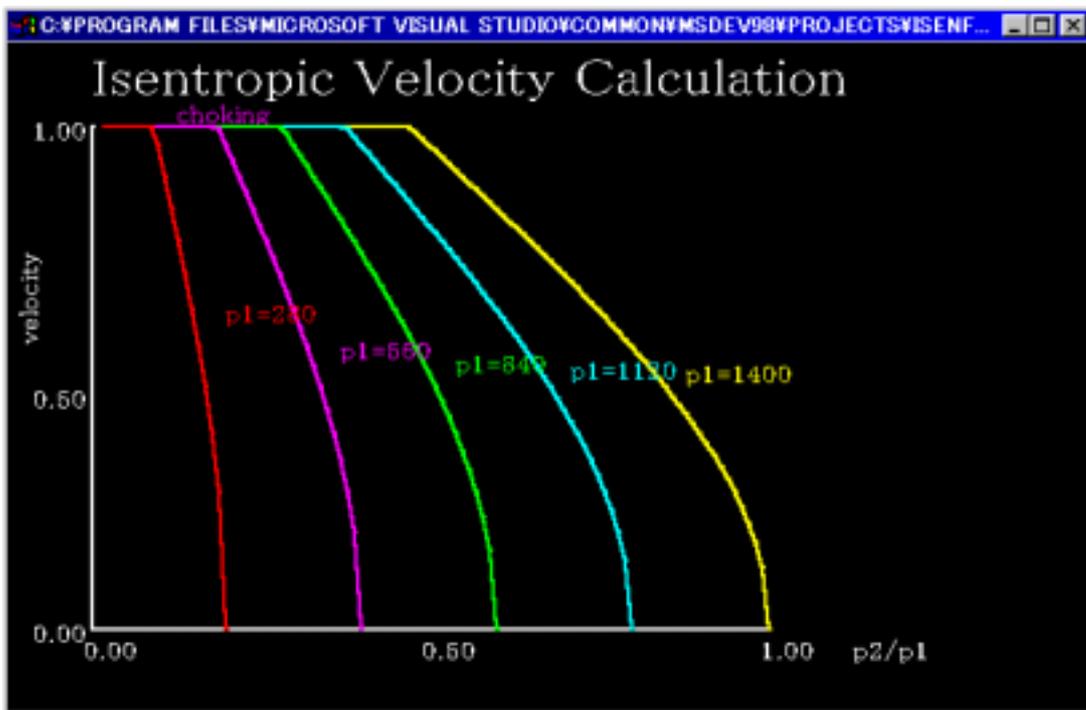


Fig8 Drawing Isentropic Velocity Calculation