平成１４年度
修士論文

条件付き最適問題

指導教員　　磯村　修一　教授

高知工科大学　大学院工学研究科
基盤工学専攻　知能機械コース
1055046　関田　晃弘

目次

序章

宇宙船を軟着陸させる場合、

（1）定められた時間内に速度＝0 で着陸する。

（2）制御のエネルギを汎関数に選び、これを最小にする。

（3）常に宇宙船の運動方程式に従う。

（4）推力には上限がる。

という要請がある。

このような問題は条件付最適問題と言い、変分法を適用すると２点境界値問題に帰着されるが、これを理論的に解くことは極めて困難で、通常はコンピュータにより試行錯誤で解かれていた。

本研究では、この軟着陸問題を制御変数に制限のある微分方程式条件付変分問題として定式化し、ポントリヤーギンの最大原理を応用して２点境界問題に帰着させて解析解を求めた。

第１章では最大原理による条件付最適問題解法のアルゴリズムについて述べた。

第２章では先ず、宇宙船を質点と見做して、すなわち姿勢制御は無視して、運動方程式を作り、自由落下のときと、制御変数の推力に制限の無い場合の最適解を求めた。次に本論文の主題である推力に制限がある場合について、運動方程式に従って着陸するときの制御のエネルギが最小となる最適制御政策を決定した。

第３章では、以上の計算をコンピュータシミュレーションで行い、得られた最適解以外の制御方法では、エネルギが増加するか、境界条件を満たさないことを確認した。

付録では、ポントリヤーギンの最適制御理論である最大原理について述べた。

1　最大原理による条件付き最適問題の解法

「ｎ次元状態ベクトルx、ｍ次元制御ベクトルuに関する微分方程式

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad 1\text{-}1$$

が成り立つ条件の下で、時刻$t = t_1$から$t = t_2$までの線積分で表された汎関数

$$I = \int_{t_1}^{t_2} g(x,u)\,dt \qquad 1\text{-}2$$

を最小にする制御ベクトルuが満たすべき関係を求めよ。ただし、時刻$t = t_1$および$t = t_2$での状態ベクトルの境界値$x_1 = x(t_1)$、$x_2 = x(t_2)$は与えられている。」と言う問題は、

付録A-２より

「Hamiloton の正準方程式

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} \qquad 1\text{-}3$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad 1\text{-}4$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \qquad 1\text{-}5$$

を解け。」という２点境界値問題に帰着される。

何故、2 点境界値問題かというと、1-３式は1-１式に他ならず、これはｎ次元状態ベクトルxのｎ元連立微分方程式で、始点と終点の状態、すなわち２点で合計 2ｎ個の境界値が与えられているからである。例えば、ロケットが地球上のある定められた地点から一定の初速度で打ち出され、月の目標とする地点に定められた速度で到達するようなものである。

一方、1-４式は汎関数１-２式が定留値をとる条件から出てくる式で、これも随伴ベクトルψに関するｎ次元連立微分方程式（随伴方程式という）となるが、これには境界値が与えられていない。

解かねばならない微分方程式は２ｎ個あるが、境界値の方は、式1-３に対しｎ個は始点で、ｎ個は終点で与えられている。

もし、通常の初期値問題のように、２ｎ個の境界値が全て始点で与えられていれば、数値積分は容易であるが、このような最適問題では、ｎ個ずつの境界値が始点と終点に分かれているため、これら２ｎ個の微分方程式は簡単には解けないのである。

この最適問題を解く手順をまとめると次の通りである。

（１） Hamilton 関数

$$H=-g(x,u)+\psi f(x,u) \qquad 1\text{-}6$$

を記述する。

（２）

$$\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial g}{\partial x}+\psi\frac{\partial f}{\partial x} \qquad 1\text{-}7$$

を計算し、微分方程式１-４

$$\dot{\psi}=-\frac{\partial H}{\partial x}$$

すなわち

$$\dot{\psi}=\frac{\partial g}{\partial x}-\psi\frac{\partial f}{\partial x}$$

を作る。

（３）

$$\frac{\partial H}{\partial \psi}=f(x,u) \qquad 1\text{-}8$$

を計算し、微分方程式　式１-３

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \psi}$$

すなわち

$$\dot{x}=f(x,u) \qquad 1\text{-}1$$

を作る。

（４）

$$\frac{\partial H}{\partial u}=-\frac{\partial g}{\partial u}+\psi\frac{\partial f}{\partial u}=0 \qquad 1\text{-}9$$

を求める。

（５）　境界条件：$t=t_1$ および $t=t_2$ ；$x_1=x(t_1)$、$x_2=x(t_2)$ の下で、
連立微分方程式１-３、１-４、１-９を解く。

なお、連立微分方程式１-３、１-４の積分の際、境界条件は $t=t_1$ で（つまり初期条件）2 個必要であるが、式１-３には $\psi_1=\psi(t_1)$ が無く、式１-４の $x_1=x(t_1)$ １つしかない。その代わり、境界 $t=t_2$ における １-４の $x_2=x(t_2)$ があるわけであるが、これでは積分できない。そこで、次の方法が考られる。

1）式１-３の不定積分を解析的に行って、ψ を求め、式１-４、１-９に代入することによって、ψ を消去し、境界条件：$t=t_1$ および $t=t_2$ ；　$x_1=x(t_1)$、$x_2=x(t_2)$ の下で微分方程式１-４を解く。

2）式１-３、１-４の不定積分を解析的に行って、$\psi(t_1)$、$x(t_1)$ から、$\psi(t_2)$、$x(t_2)$ までの伝達行列を求め、境界条件：$t=t_2$ ：$x_2=x(t_2)$ を $t=t_1$ に移すことによって、$\psi_1=\psi(t_1)$ を求める。

3）$t=t_1$ での境界条件 $\psi_1=\psi(t_1)$ を仮定し、式１-３、１-４の積分を行って、$t=t_2$ での境界条件 $x_2=x(t_2)$ を満たす $\psi_1=\psi(t_1)$ を探索する。

2　　運動方程式

2－1　自由落下

「空中にある質量mの物体（質点）を落下させたとき、１秒後の速度と変位を求めよ。ただし、空気抵抗は無視する。」という問題は簡単である。

運動のエネルギは

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

位置エネルギは

$$V = m\,g\,x$$

Lagrangian は

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx$$

となる。付録の式A-５５で　u＝0

$$F(x, \dot{x}, \psi, u) = L(x, \dot{x})$$

とおくと、

$$H = \lambda\,\dot{x} - L \qquad 2\text{-}1$$

付録の式A-２５より

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \qquad 2\text{-}2$$

であるから、Hamiltonian は

$$H = \lambda\,\dot{x} - L = \lambda\,\dot{x} - (\frac{1}{2} m\,\dot{x}^2 - m\,gx)$$

である。念のため、$\dfrac{dH}{d\,t}$ を計算してみると、

$$\frac{dH}{d\,t} = \dot{\lambda}\,\dot{x} + \lambda\,\ddot{x} - m\dot{x}\,\ddot{x} + m\,g\,\dot{x}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x} = \lambda$ であるから

$$\frac{dH}{d\,t} = (\dot{\lambda} + m\,g)\,\dot{x}$$

$\lambda = m\,\dot{x}$ であるから、$\dot{\lambda} = m\,\ddot{x}$　したがって

$$m\,(\ddot{x} + g)\dot{x} = 0$$

となり、運動方程式 $\ddot{x} + g = 0$ が得られる。

付録の式A-６４に H を代入して

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial\,x} = -m\,g$$

$$m\dot{x} = \lambda$$

となるから、連立微分方程式

$$\dot{\lambda} = -m\,g$$

$$\dot{x} = \frac{\lambda}{m}$$

を得る。λは運動量であり、初期条件は速度と変位で与えられるので、

$$v = \frac{\lambda}{m}$$

と置き換えると

$$\dot{v} = -g$$
$$\dot{x} = v$$

となる。これは簡単に積分できて

$$v = -g\,t + c_1$$
$$x = -\frac{1}{2} g\,t^2 + c_1\,t + c_2$$

となる。初期条件が

$$t = 0 : v = 0, x = 0$$

と与えられていると、

$$c_1 = c_2 = 0$$

となるから

$$v = -g\,t$$
$$x = -\frac{1}{2} g\,t^2$$

となる。ｔ＝１では $v = -g$ 、$x = -\frac{g}{2}$ となる。

初期条件が、$t = 0$ で　$v = 0$、$x = \frac{g}{2}$ なら、

$$v = -gt \qquad 2\text{-}3$$
$$x = -\frac{g}{2}(1 - t^2) \qquad 2\text{-}4$$

となる。すなわち、$\frac{g}{2}$ の高さから自由落下させると、ｔ＝１秒後には $v = -g$ の速度で地面に激突する。

２－２　軟着陸

$\frac{g}{2}$ の高さから制御しながら落下させ、ｔ＝１秒後に軟着陸させることが出来るであろうか？
自由落下でも１秒を要するので減速のみでは不可能である。したがって、最初は下向きに加速してある時点で減速することになるのであろうが、そのような制御は無数にあると思われる。
そこで問題：

「質量ｍの物体を $\frac{g}{2}$ の高さから一秒以内に軟着陸させるときに、費用

$$C = \int_0^1 u^2 d\,t \qquad 2\text{-}5$$

が最小となる操作量ｕを求めよ。ただし、ｕは物体を制御する単位質量当たりの力 $u = \frac{f}{m}$ である。」を考えてみよう。そのため、二つのステップで Hamilton の原理を使用する。
ステップ１は Euler-Lagrange の方程式を導く段階で、ステップ２は最大原理を用いて最適制御を求める段階である。

ステップ１　ロケットの Euler-Lagrange の方程式
自由落下の時と同じようにして
運動エネルギは

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad 2\text{-}6$$

位置エネルギは

$$V = m g x \qquad 2\text{-}7$$

仕事は

$$W = f x \qquad 2\text{-}8$$

Lagrangian は

$$L = T - V + W = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - m g x + f x \qquad 2\text{-}9$$

Hamiltonian は式２-１から

$$H = \lambda\dot{x} - L = \lambda\dot{x} - (\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - m g x + f x)$$

である。付録の式A-６４と同様にして

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m g + f$$

式２-２より

$$m\dot{x} = \lambda$$

となるから、連立微分方程式

$$\dot{\lambda} = -m g + f \qquad 2\text{-}10$$

$$\dot{x} = \frac{\lambda}{m} \qquad 2\text{-}11$$

を得る。λは運動量であり、初期条件は速度と変位で与えられるので、

$$v = \frac{\lambda}{m} \qquad 2\text{-}12$$

と置き換えると

$$\dot{v} = -g + u \qquad 2\text{-}13$$

$$\dot{x} = v \qquad 2\text{-}14$$

が得られる。境界条件は次のようになる。

初期条件：ｔ＝0 で

$$v = v(0) = 0 \qquad 2\text{-}15$$

$$x = x(0) = \frac{g}{2} \qquad 2\text{-}16$$

終端条件：すなわち軟着陸条件はｔ＝１で

$$v = v(1) = 0 \qquad 2\text{-}17$$

$$x = x(1) = 0 \qquad 2\text{-}18$$

ステップ２　最適軟着陸制御

連立微分方程式はベクトルと行列で表すと、

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} -g \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}19$$

となる。一般にベクトル微分方程式は

$$\frac{dX}{dt} = F(X,U) \qquad 2\text{-}20$$

と書ける。F が線形の時は

$$F(X,U) = AX + BU + C$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU + C \qquad 2\text{-}21$$

となる。ここに

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v\\x\end{bmatrix}、\mathrm{U}=\mathrm{u}、A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}、B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}、C=\begin{bmatrix}-g\\0\end{bmatrix}$$

である。Hamiltonian は

$$H=-u^2+\langle\psi\,|\,F(X,U)\rangle$$

$$\psi=\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{bmatrix}、F(X,U)=\begin{bmatrix}u-g\\x_1\end{bmatrix}$$

$$H=-u^2+\psi^T F(X,U)$$

$$=-u^2+\begin{bmatrix}\psi_1&\psi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u-g\\x_1\end{bmatrix}$$

$$H=-u^2+\psi_1(u-g)+\psi_2 x_1 \qquad 2\text{-}22$$

であるから、Hamilton の正準方程式は

$$\dot{x}_1=\frac{\partial H}{\partial\psi_1}=u-g$$

$$\dot{x}_2=\frac{\partial H}{\partial\psi_2}=x_1$$

$$\dot{\psi}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-\psi_2$$

$$\dot{\psi}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=-2u+\psi_1=0$$

となる。結局、解くべき連立方程式は微分方程式

$$\dot{x}_1=u-g \qquad 2\text{-}23$$

$$\dot{x}_2=x_1 \qquad 2\text{-}24$$

$$\dot{\psi}_1=-\psi_2 \qquad 2\text{-}25$$

$$\dot{\psi}_2=0 \qquad 2\text{-}26$$

および

$$u=\frac{\psi_1}{2} \qquad 2\text{-}27$$

となる。式２-２３および２-２４は、与えられた微分方程式条件に他ならない。式２-２５および２-26は随伴変数ψ_1、ψ_2に関する新たに得られた微分方程式で、随伴方程式と言われる。式２-23 および２-２４にはｔ＝0 とｔ＝１での４個の境界条件２-１５～２-１８がはじめから与えられているが、随伴方程式　式２-２５および２-２６には境界条件がない。最適問題が境界値問題と言われる所以である。すなわち、微分方程式条件

$$\dot{v}=-g+u \qquad 2\text{-}13$$

$$\dot{x}=v \qquad 2\text{-}14$$

の下で、費用関数

$$C=\int_0^1 u^2\,dt \qquad 2\text{-}5$$

を最小にする制御ｕを探索する問題は、ｔ＝0とｔ＝１に分かれて与えられた、４個の境界条件　２-１５～２-１８を満たす４個の連立微分方程式２-２３～２-２６を解くことに帰着されるのである。また、連立微分方程式を解くのが困難な場合、逆に境界値問題を極値探索の問題に変換して

解くこともある。
　制御に制限がない場合、境界値問題（式２-１５～２-１８および式２-２３～２-２６）は次に示すように簡単に解ける。
　式２-２６、２-２５の順に積分して

$$\dot{\psi}_2 = 0$$
$$\psi_2 = c_1$$
$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 = -c_1$$
$$\psi_1 = -c_1 t + c_2$$

　式２-２７を２-２３に代入して、式２-２３，２-２４の順に再び積分して

$$u = \frac{\psi_1}{2} = \frac{1}{2}(-c_1 t + c_2)$$
$$\dot{x}_1 = u - g = \frac{1}{2}(-c_1 t + c_2) - g$$
$$x_1 = -\frac{1}{4}c_1 t^2 + (\frac{1}{2}c_2 - g)t + c_3$$
$$\dot{x}_2 = x_1 = -\frac{1}{4}c_1 t^2 + (\frac{1}{2}c_2 - g)t + c_3$$
$$x_2 = -\frac{1}{12}c_1 t^3 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}c_2 - g)t^2 + c_3 t + c_4$$

を得る。初期条件２-１５，２-１６：

$$t = 0 : v = 0、x = \frac{g}{2}$$

から

$$c_3 = 0、c_4 = \frac{g}{2}$$

終端条件２-１７、２-１８：すなわち軟着陸条件の

$$t = 1 : v = 0、x = 0$$

から

$$-\frac{1}{4}c_1 + \frac{c_2}{2} - g = 0$$
$$-\frac{1}{12}c_1 + \frac{1}{2}(\frac{c_2}{2} - g) + \frac{g}{2} = 0$$

　となり、これを解いて、

$$c_1 = -12g$$
$$c_2 = -4g$$
$$\psi_1 = 12gt - 4g$$
$$u = 6gt - 2g$$

　結局、

$$x_1 = 3gt^2 - 3gt = 3gt(t-1) \qquad 2\text{-}28$$
$$x_2 = gt^3 - \frac{3}{2}gt^2 + \frac{g}{2}$$
$$= \frac{1}{2}g(t-1)^2(2t+1) \qquad 2\text{-}29$$

　が得られる。ｕに制限がなければ

$$u = 2g(3t-1) \qquad \text{2-30}$$

となる。$t < \frac{1}{3}$ では $u < 0$、$t > \frac{1}{3}$ では $u > 0$ であるから、自由落下で１秒かかる地表へ軟着陸させるには、最初落下を加速し、地表に近づくと減速しなければならないことを示している。

２－３　制御に制限がある場合の軟着陸

制御に制約のあるエネルギ最小軟着陸問題を考える。ｔ＝０のとき、

$$x = \frac{g}{2} \qquad \text{2-31}$$

の高さで静止していた宇宙船をｔ＝１で地上（$x = 0$）に軟着陸させる際、エネルギ最小となる制御ｕおよび $\frac{dx}{dt}$、ｘの trajectory を求める。ただし、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u - g \qquad \text{2-32}$$

にしたがい、エネルギは

$$J = \int_0^1 u^2 dt \qquad \text{2-33}$$

とする。ここに、ｕは宇宙船の単位質量当たりのスラストで、

$$-3g \leqq u \leqq 3g \qquad \text{2-34}$$

の制限がある。Ｕに制限がない場合の最適制御政策は

$$u = 2g(3t-1) \qquad \text{2-35}$$

であったから、終端ｔ＝１では

$$u = 4g \qquad \text{2-36}$$

となった。ところが

$$-3g \leqq u \leqq 3g \qquad \text{2-34}$$

の制限があるので、ｔ＝１近傍での最適制御政策、すなわち Hamiltonian H が最大になるのは

$$u = 3g \qquad \text{2-37}$$

のときである。与えられた微分方程式で

$$x_1 = \frac{dx}{dt} \qquad \text{2-38}$$

$$x_2 = x \qquad \text{2-39}$$

とおくと

$$\frac{dx_1}{dt} = u - g \qquad \text{2-40}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \qquad \text{2-41}$$

となるから、ｕ＝３ｇを代入して

$$\frac{dx_1}{dt} = 3g - g = 2g \qquad \text{2-42}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \qquad \text{2-43}$$

が得られる。積分定数を a_1、a_2 とすると、

$$x_1 = 2gt + a_1$$

$$x_2 = gt^2 + a_1 t + a_2$$

となる。終端境界条件のｔ＝１：$x_1=0$、$x_2=0$ より　$0=2g+a_1$、$0=g+a_1+a_2$、これを解いて $a_1=-2g$、$a_2=g$ となるから、

$$u=3g \qquad 2\text{-}44$$

$$x_1=2g(t-1) \qquad 2\text{-}45$$

$$x_2=gt^2-2gt+g=g(t-1)^2 \qquad 2\text{-}46$$

を得る。この解はｔ＝0 での境界条件を満たしていない。ｔ＝0 の近くでは、ｕに制限のないときの最適制御政策　$u=2g(3t-1)$ は、$u=-2g$ となり、$-3g$≦ｕ≦$3g$ の範囲内にある。したがって、２-２３～２-２７

$$\dot{x}_1=u-g \qquad 2\text{-}23$$

$$\dot{x}_2=x_1 \qquad 2\text{-}24$$

$$\dot{\psi}_1=-\psi_2 \qquad 2\text{-}25$$

$$\dot{\psi}_2=0 \qquad 2\text{-}26$$

および

$$u=\frac{\psi_1}{2} \qquad 2\text{-}27$$

を積分した。

$$u=\frac{1}{2}(-c_1t+c_2) \qquad 2\text{-}47$$

$$x_1=-\frac{1}{4}c_1t^2+(\frac{1}{2}c_2-g)t \qquad 2\text{-}48$$

$$x_2=-\frac{1}{12}c_1t^3+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}c_2-g)t^2+\frac{g}{2} \qquad 2\text{-}49$$

が使える。ｔ＝１の近傍では、式２-４４、２-４５、２-４６

$$u=3g$$

$$x_1=2g(t-1)$$

$$x_2=g(t-1)^2$$

が成り立ち、またｔ＝0 の近傍では、式２-４７，２-４８、２-４９が成り立つので、$0<t<1$の
ある時刻ｔ＝τで式２-４７，２-４８、２-４９から式２-４４、２-４５、２-４６への切り替えが起き、切り替え点ｔ＝τではこれらの式が連続とならねばならない。すなわち、

$$\frac{1}{2}(-c_1\tau+c_2)=3g \qquad 2\text{-}50$$

$$-\frac{1}{4}c_1\tau^2+(\frac{1}{2}c_2-g)\tau=2g(\tau-1) \qquad 2\text{-}51$$

$$-\frac{1}{12}c_1\tau^3+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}c_2-g)\tau^2+\frac{g}{2}=g(\tau-1)^2 \qquad 2\text{-}52$$

が成り立つ必要がある。未知数τ、c_1、c_2 であるこの連立方程式を手で解くのは簡単ではないが、コンピュータで以下のようにして解くことができる。
例えば、式２-５１、２-５２を

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\tau^2 & \frac{\tau}{2} \\ -\frac{1}{12}\tau^3 & \frac{\tau^2}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3g\tau-2g \\ \frac{1}{2}g\tau^2+g(\tau-1)^2-\frac{g}{2} \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}53$$

式２-５０を

$$\tau' = \frac{2(\frac{c_2}{2} - 3g)}{c_1} \qquad ２-５４$$

と書き換え、

（１）　τ＝0.1 と仮定する。

（２）　τを式２-５３に代入して c_1、c_2 を計算する。例えば逆マトリクスやクラメルのルールを使う。

（３）　その結果を式２-５４に代入してτ’を求める。

（４）　$\tau' \neq \tau$ なら $\tau' = \tau + \Delta\tau$ （例えば△τ=0.01）としてτを増やし、手順（２)、(３)、(４）を繰り返す。

結果は次のようになった。

$$\tau = \frac{3}{4}$$

$$c_1 = -\frac{128}{9} g$$

$$c_2 = -\frac{14}{3} g$$

$0 \leqq t \leqq \frac{3}{4}$ のとき、式２-４７，２-４８，２-４９に代入して

$$u = \frac{64}{9} gt - \frac{7}{3} g \qquad ２-５５$$

$$x_1 = \frac{32}{9} gt^2 - \frac{10}{3} gt \qquad ２-５６$$

$$x_2 = \frac{32}{27} gt^3 - \frac{5}{3} gt^2 + \frac{g}{2} \qquad ２-５７$$

$\frac{3}{4} \leqq t \leqq 1$ のとき、式２-４４、２-４５、２-４６

u＝３g

$$x_1 = 2g(t-1)$$

$$x_2 = gt^2 - 2gt + g = g(t-1)^2$$

が成り立つ。

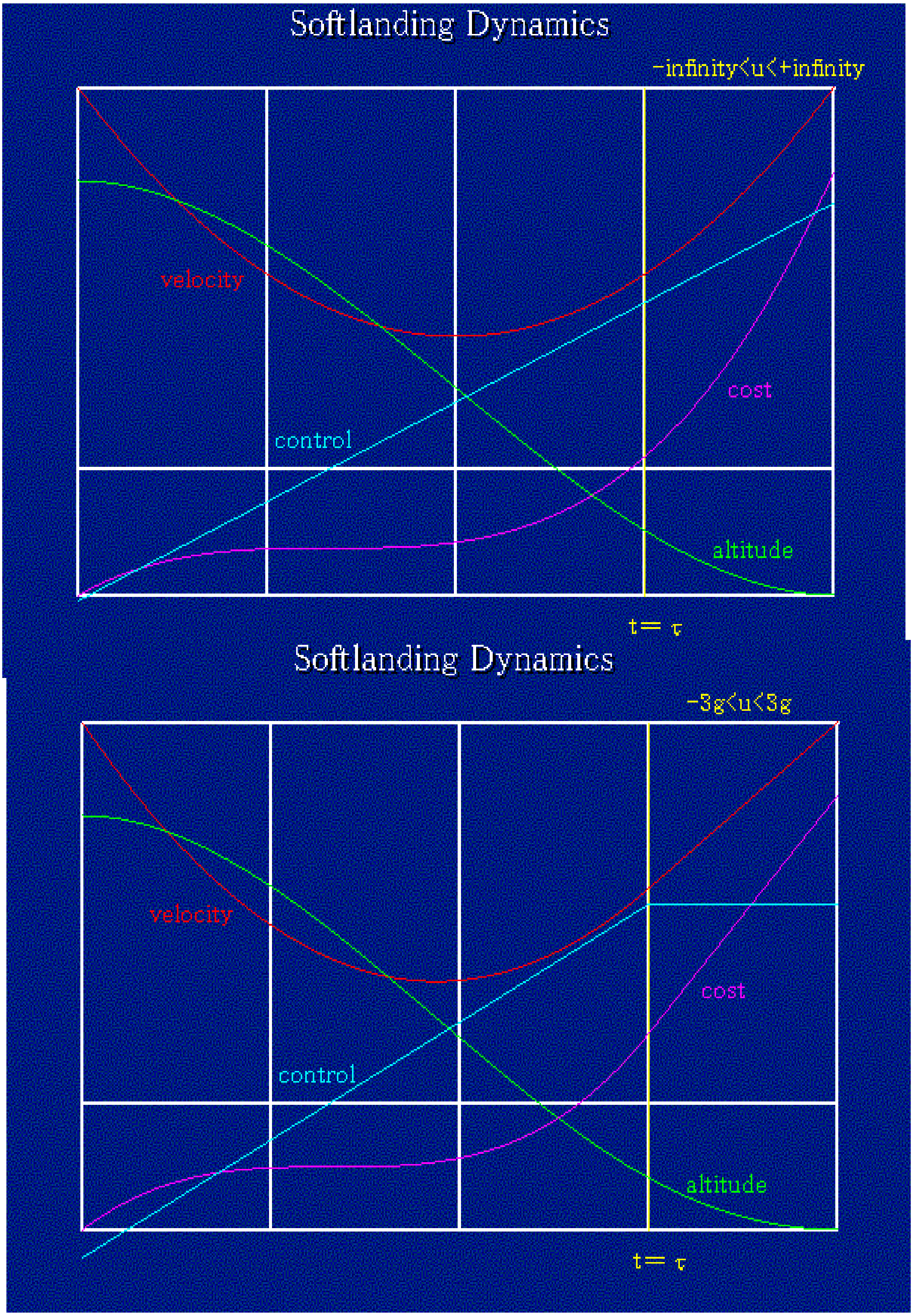

図２：得られた最適解：c_1、c_2を用いて計算（$-3g \leqq \mathrm{u} \leqq 3g$）

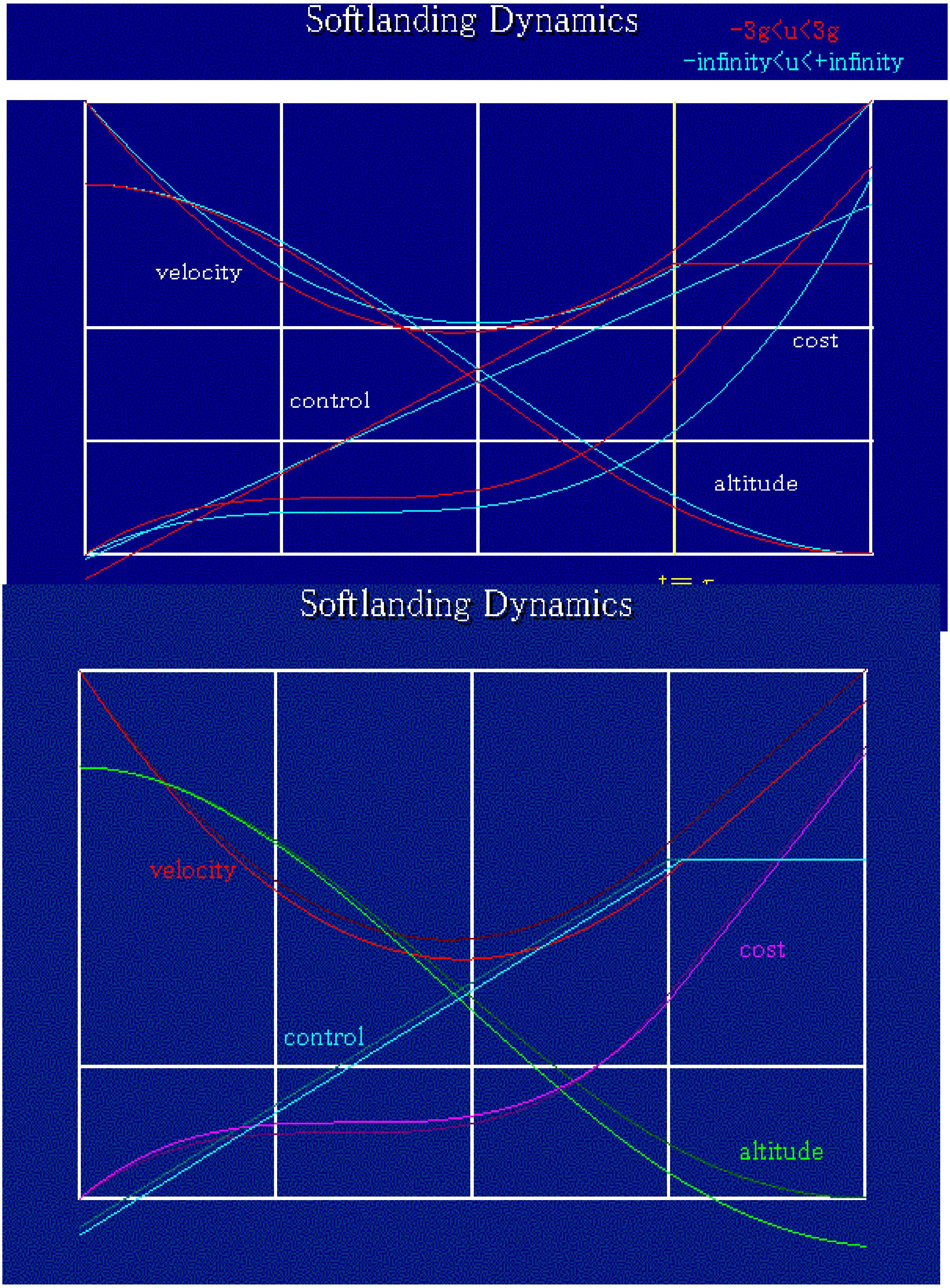

図４　$c_1 = -\dfrac{127.8}{9}g$、$c_2 = -\dfrac{14.1}{2.9}g$　として計算。（$-3g \leqq \mathrm{u} \leqq 3g$）

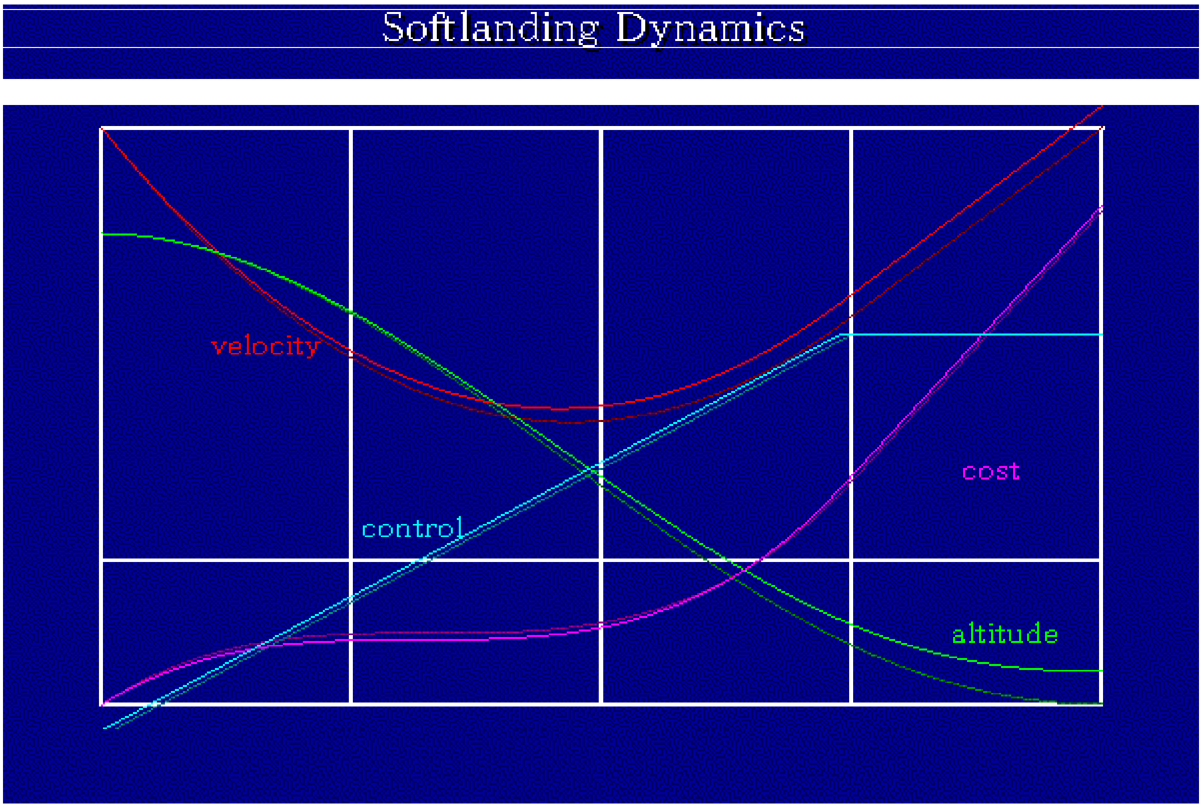

図５　$c_1 = -\dfrac{128.2}{9}g$、$c_2 = -\dfrac{7.0}{3.1}g$　として計算。（$-3g \leqq \mathrm{u} \leqq 3g$）

結言

本論文では宇宙船の軟着陸について、微分方程式条件付変分問題として定式化させることにより解析解を求めた。この解析解は軟着陸のシミュレーション結果から最適解であることが分かった。

いままでこのような問題は、論理的に解くことが極めて困難なことから、コンピュータにより試行錯誤に解いていくしかなかったが、本方法によって論理的に最適解を求めることができた。

謝辞

本研究を進めるにあたり、指導していただいた磯村修一教授に深く感謝の意を表したい。

参考文献

（1）Boltyanski,V.G.,　Gamkrelidse,R.V.,　Mishchenko,E.F. &　Pontryagin,L.S., “THE Maximum Principle in the Theory of Optimal Process of Control”, IFAC Congress，1960

（2）Dixon,L.C.W., ”NONLINEAR OPTIMISATION”, The English Universities Press Limited, 1972

（3） olak,E.，Mayne,D.Q.，”A Feasible Directions Algorithm for Optimal Control Problems with Control and Terminal Inequality Constraints”，IEEE Trans.，AC-22，No.5，1977.

（4）http://www9.ocn.ne.jp/~isomura/解析学第 4 編境界値問題－２（最適問題）

付録
A　　条件付最適化問題
A－１　Euler-Lagrange の方程式
　微分方程式条件

$$\dot{x} = f(x,u) \quad \text{A-1}$$

のもとで、時刻$t = t_1$から$t = t_2$までの線積分で表された汎関数

$$I = \int_{t_1}^{t_2} g(x,u)dt \quad \text{A-2}$$

を最小にする問題を考える。ただし、時刻$t = t_1$および$t = t_2$での境界値$x_1 = x(t_1)$、$x_2 = x(t_2)$は与えられている。ｕは制御で$u_{\min} \leqq u \leqq u_{\max}$の制限を許容している点が古典的変分法と異なる。
この問題は条件なしで

$$J = \int_{t_1}^{t_2} [g(x,u) + \lambda\{\dot{x} - f(x,u)\}]dt \quad \text{A-3}$$

を最小にする問題に変えることができる。被積分関数をＦとすると

$$F = g(x,u) + \lambda\{\dot{x} - f(x,u)\} \quad \text{A-4}$$

であり、これは

$$F = F(x,\dot{x},u,\lambda) \quad \text{A-4'}$$

と書ける。したがって式A-３は時刻$t = t_1$から$t = t_2$までの線積分

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x,\dot{x},u,\lambda)dt \quad \text{A-5}$$

で表される。
　経路の変分（仮想変位）は、Taylor 展開を行って

$$\delta x^2, \delta \dot{x}^2, \delta u^2, \delta \lambda^2$$

以上の項を無視すると

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\delta \lambda \right) dt \quad \text{A-6}$$

となる。J が停留値をとる条件はδJ=0、すなわち

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\delta \lambda \right) dt = 0 \quad \text{A-7}$$

である。ここで、$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}$の項には部分積分を応用する。関数の積の微分

$$\frac{d}{dt}(uv) = \frac{du}{dt}v + u\frac{dv}{dt}$$

において、

$$u = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$$
$$v = \delta x$$

と考えると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\delta x$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}$$

したがって

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x \qquad \text{A-8}$$

となり、$\delta \dot{x}^2$ は消去できる。式A-８を式A-７に代入して

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\delta \lambda\right)dt = 0$$

左辺第一項と第三項の δx を外に出して纏めると、

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\delta x + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\delta \lambda\right\}dt = 0$$

左辺第一項の定積分は

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right)dt = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_1}^{t_2}$$

となるから

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\delta x + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial u}\delta u\, dt + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial \lambda}\delta\lambda\, dt = 0 \qquad \text{A-9}$$

を得る。

式A-７が成り立つ、すなわちδＪ=0 となるためには、$\delta x, \delta u, \delta \lambda$ の如何に拘らず、式A-９が成り立てばよい。時刻 $t = t_1$ と $t = t_2$ で境界値 $x_1 = x(t_1)$、$x_2 = x(t_2)$ が与えられているならば、すなわち、経路の端点が固定されているならば、

$$[\delta x]_{t=t_1} = 0\,,\quad [\delta x]_{t=t_2} = 0$$

であるから、そのときは式

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad \text{A-10}$$

が成り立つ。

　残りの条件式

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\delta x + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial u}\delta u\, dt + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial \lambda}\delta\lambda\, dt = 0$$

　が　$t_1 < t < t_2$ に対して成り立てば、$t_1 < t < t_2$ の如何なる $\delta x, \delta u, \delta \lambda$ に対しても、δＪ=0 となる。そのためには

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \qquad \text{A-11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \qquad \text{A-12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \qquad \text{A-13}$$

であればよい。これを Euler-Lagrange の方程式という。

式A-４

$$F = F(x, \dot{x}, u, \lambda) = g(x,u) + \lambda\{\dot{x} - f(x,u)\} \qquad \text{A-4}$$

より、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{A-14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \lambda \qquad \text{A-15}$$

となる。Euler-Lagrange の方程式A-１１より

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$$

であるから、これを式A-１４に代入して

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial g}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

となる。さらに、式A-１５より

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{A-16}$$

を得る。

再び、式A-４のｕに関する偏微分より

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u} \qquad \text{A-17}$$

式A-１２の条件から

$$\frac{\partial g}{\partial u} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \qquad \text{A-18}$$

が得られる。λに関しても、式A-４のλに関する偏微分より

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \dot{x} - f(x,u)$$

式A-１３の条件から

$$\dot{x} - f(x,u) = 0$$

となるが、これは微分方程式制約条件式A-１に他ならない。結局、問題は式A-１，　A-１６，A-１８を連立させた

$$\dot{x} - f(x,u) = 0$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

を解く問題に帰着される。なお、境界では式A-１０

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

が成り立つから、式A-１５の関係　$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \lambda$　を用いて

$$\left[\lambda \delta x\right]_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad \text{A-19}$$

となる。

Ａ－２　　最大原理

式A-４’

$$F = F(x, \dot{x}, u, \lambda) \qquad \text{A-4'}$$

の時間微分を検討してみる。

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} \qquad \text{A-20}$$

式A-１２、A-１３から

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \qquad \text{A-12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \qquad \text{A-13}$$

したがって、式A-２０は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} \qquad \text{A-21}$$

となる。Euler-Lagrange の方程式A-１１

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \qquad \text{A-11}$$

より

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$$

であるから、これを式A-２１に代入して

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt}$$

となる。この右辺は$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$と$\frac{dx}{dt}$の積の微分、すなわち

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{dx}{dt}\right)$$

に等しいので

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{dx}{dt}\right)$$

となるが、左辺を右辺に移項して$\frac{d}{dt}$で括ると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{dx}{dt} - F\right) = 0 \qquad \text{A-22}$$

を得る。式A-２２が成り立つには

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{dx}{dt} - F = const. \qquad \text{A-23}$$

であり、これを H と定義する。すなわち

$$H = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{dx}{dt} - F \qquad \text{A-24}$$

右辺の$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$を新しい関数$\psi$で表すと、

$$\psi = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \qquad \text{A-25}$$

と置くと、$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$であるから、この式A-２４は

$$H = \psi\,\dot{x} - F \qquad \text{A-26}$$

となる。式A-4

$$F = g(x,u) + \lambda\{\dot{x} - f(x,u)\} \qquad \text{A-4}$$

より、

$$H = \psi\dot{x} - \left[g(x,u) + \lambda\{\dot{x} - f(x,u)\}\right]$$

$$H = (\psi - \lambda)\dot{x} - g(x,u) + \lambda f(x,u) \qquad \text{A-27}$$

を得る。式A-１５と式A-２５から、実はψとλは等しく、

$$H = -g(x,u) + \psi f(x,u) \qquad \text{A-28}$$

であり、Ｈはx、ψ、ｕの関数で表される。すなわち

$$H = H(x,\psi,u) \qquad \text{A-29}$$

と書くことができ、これを Hamilton 関数と言う。

式A-２９から、Ｈの変分δＨは

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u \qquad \text{A-30}$$

となる。一方、式A-２８から、

$$\delta H = -\frac{\partial g}{\partial x}\delta x - \frac{\partial g}{\partial u}\delta u + f(x,u)\delta\psi + \psi\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \psi\frac{\partial f}{\partial u}\delta u$$

$$\delta H = \left(-\frac{\partial g}{\partial x} + \psi\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + f(x,u)\delta\psi + \left(-\frac{\partial g}{\partial u} + \psi\frac{\partial f}{\partial u}\right)\delta u \qquad \text{A-31}$$

式A-３０とA-３１を比較して

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x} + \psi\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{A-32}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = f(x,u) \qquad \text{A-33}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial g}{\partial u} + \psi\frac{\partial f}{\partial u} = 0 \qquad \text{A-34}$$

を得る。式A-１６より

$$\dot{\psi} = \frac{\partial g}{\partial x} - \psi\frac{\partial f}{\partial x}$$

式A-３２と比較して

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \text{A-35}$$

を得る。式A-１より

$$f(x,u) = \dot{x}$$

式A-３３に代入して

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} \qquad \text{A-36}$$

を得る。式A-１７、A-１８より

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} - \psi\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

式A-３４と比較して

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \qquad \text{A-37}$$

を得る。これよりＦが最小となるｕに対してＨは最大となる。式A-３５、A-３６

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} \qquad \text{A-36}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \text{A-35}$$

を Hamilton の正準方程式という。

念のために Hamilton 関数の時間微分を計算してみよう。式A-２８から

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial g}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial g}{\partial u}\dot{u} + \dot{\psi} f(x,u) + \psi\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \psi\frac{\partial f}{\partial u}\dot{u}$$

$$\frac{dH}{dt} = \dot{\psi} f(x,u) + \left(-\frac{\partial g}{\partial x} + \psi\frac{\partial g}{\partial x}\right)\dot{x} + \left(-\frac{\partial g}{\partial u} + \psi\frac{\partial f}{\partial u}\right)\dot{u}$$

となるが、式A-３２、A-３４より

$$\frac{dH}{dt} = \dot{\psi} f(x,u) + \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u}$$

式A-３５を代入して

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial \psi} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial \psi} + \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u} = 0$$

となり、式A-２２とA-２４が示された。

Ａ－３　　多変数動的システムの境界値問題

対象は一般に多変数系であり、微分方程式条件

$$\dot{x} = f(x,u)$$

はベクトル微分方程式（成分で書けば連立微分方程式）で与えられる。ここに,
xはｎ次元状態ベクトル、ｕはm次元制御ベクトル、ｆはｎ次元ベクトルである。

（１） Euler-Lagrange の方程式

ベクトル微分方程式条件

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad \text{A-38}$$

のもとで、時刻$t = t_1$から$t = t_2$まで線積分で表された汎関数

$$I = \int_{t_1}^{t_2} g(x,u)dt \qquad \text{A-2}$$

を最小にする問題を考える。ただし、時刻$t = t_1$および$t = t_2$での境界値$x_1 = x(t_1)$、$x_2 = x(t_2)$は与えられている。 なお、ｇはベクトルx およびｕの関数で、スカラーである。

この問題は、Lagrange の未定定数λに対応するｎ次元随伴状態ベクトル（co-state vector）ψを導入し、条件なしで

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left[g(x,u) + \langle \psi \,|\, \dot{x} - f(x,u) \rangle \right] dt \qquad \text{A-39}$$

を最小にする問題に変えることができる。ここに、〈　｜　〉は内積を表す。被積分関数を F とすると

$$F = g(x,u) + \langle \psi \,|\, \dot{x} - f(x,u) \rangle \qquad \text{A-40}$$

$$F = F(x,\dot{x},\psi,u) \qquad \text{A-40'}$$

である。したがって式A-３９は時刻$t = t_1$から$t = t_2$までの線積分

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x,\dot{x},\psi,u)dt \qquad \text{A-41}$$

で表される。経路の変分（仮想変位）は、Taylor 展開を行って、$\delta x^2, \delta \dot{x}^2, \delta u^2, \delta \psi^2$以上の項を無視すると

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial F}{\partial u} \delta u \right) dt \qquad \text{A-4 2}$$

となり、A－１節で述べたように、部分積分によって、

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \psi} \delta \psi \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial u} \delta u \, dt = 0 \qquad \text{A-4 3}$$

を得る。

Ｊが極値となる条件、すなわちδＪ＝0 であるためには、$\delta x, \delta \psi, \delta u$ の如何に拘らず式A-４３が成り立てばよい。そのためには、先ず

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad \text{A-4 4}$$

が成り立つことである。時刻 $t = t_1$ と $t = t_2$ で境界値 $x_1 = x(t_1)$、$x_2 = x(t_2)$ が与えられているならば、すなわち、経路の端点が固定されているならば

$$[\delta x]_{t=t_1} = 0 \quad [\delta x]_{t=t_2} = 0$$

であるから式A-44 は満たされる。

次に、$t_1 < t < t_2$ の如何なる $\delta x, \delta \psi, \delta u$ に対しても

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \qquad \text{A-4 5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0 \qquad \text{A-4 6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \qquad \text{A-4 7}$$

が成り立つならばδＪ＝0 となる。このようにA－１節と同様にして Euler-Lagrange の方程式が得られる。式A-４０

$$F(x, \dot{x}, \psi, u) = g(x,u) + \langle \psi \mid \dot{x} - f(x,u) \rangle \qquad \text{A-4 0}$$

より、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} - \left\langle \psi \middle| \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle \qquad \text{A-4 8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \psi \qquad \text{A-4 9}$$

となる。Euler-Lagrange の方程式A-４５より

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$$

であるから、これを式A-４８に代入して

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial g}{\partial x} - \left\langle \psi \middle| \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$$

となる。さらに、式A-４９より

$$\dot{\psi} = \frac{\partial g}{\partial x} - \left\langle \psi \middle| \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle \qquad \text{A-5 0}$$

が得られる。ψ に関しても、式A-４０より

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = \dot{x} - f(x,u)$$

式A-４６より

$$\dot{x} - f(x,u) = 0$$

となるが、これは微分方程式制約条件式A-３８に他ならない。ｕに関しては、再び、式A-４０より

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} - \left\langle \psi \middle| \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle \qquad \text{A-５１}$$

を得る。結局、問題は式A-３８、A-５０、A-５１を連立させた

$$\dot{x} - f(x,u) = 0$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial g}{\partial x} - \left\langle \psi \middle| \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} - \left\langle \psi \middle| \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle$$

を解く問題に帰着される。なお、境界では式A-４４

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

が成り立つから、式A-４９の関係　$\partial F ／ \partial x' = \psi$　を用いて

$$[\psi \, \delta x]_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad \text{A-５２}$$

となる。

（２）Hamilton の正準方程式

式A-４０

$$F(x, \dot{x}, \psi, u) = g(x,u) + \langle \psi \,|\, \dot{x} - f(x,u) \rangle \qquad \text{A-４０}$$

の時間微分から、A－２節で式A-２２を導いた同じ方法で

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{dx}{dt} - F \right) = 0 \qquad \text{A-５３}$$

を得る。式A-５３が成り立つには

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{dx}{dt} - F = const. \qquad \text{A-５４}$$

であり、これを H と定義する。すなわち

$$H = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{dx}{dt} - F \qquad \text{A-５５}$$

となる。　$\psi = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}$、$\dot{x} = \dfrac{dx}{dx}$ であるから、この式A-５５は

$$H = \psi \dot{x} - F \qquad \text{A-５６}$$

と書ける。式A-４０を代入すると $\psi x'$ の項がなくなって

$$H = -g(x,u) + \langle \psi \,|\, \dot{x} - f(x,u) \rangle \qquad \text{A-５７}$$

となる。H は Hamilton 関数で、x, ψ, u の関数で表され、

$$H = H(x, \psi, u) \qquad \text{A-５８}$$

と書くことができる。式A-５８から、Hの変分δH は

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \qquad \text{A-５９}$$

である。一方、式A-５７から、

$$\delta H = -\frac{\partial g}{\partial x}\delta x - \frac{\partial g}{\partial u}\delta u + \langle \delta\psi \mid f(x,u) \rangle + \langle \psi \mid \frac{\partial f}{\partial x}\delta x \rangle + \langle \psi \mid \frac{\partial f}{\partial u}\delta u \rangle$$

$$\delta H = \left(-\frac{\partial g}{\partial x} + \langle \psi \mid \frac{\partial f}{\partial x} \rangle \right)\delta x + f(x,u)\,\delta\psi + \left(-\frac{\partial g}{\partial u} + \langle \psi \mid \frac{\partial f}{\partial u} \rangle \right)\delta u \qquad \text{A-60}$$

式A-５９と式A-６０を比較して

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x} + \langle \psi \mid \frac{\partial f}{\partial x} \rangle \qquad \text{A-61}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = f(x,u) \qquad \text{A-62}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial g}{\partial u} + \langle \psi \mid \frac{\partial f}{\partial u} \rangle \qquad \text{A-63}$$

を得る。式A-５０より

$$\dot{\psi} = \frac{\partial g}{\partial x} + \left\langle \psi \middle| \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$$

式A-６１と比較して

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \text{A-64}$$

を得る。式A-３８より

$$f(x,u) = \dot{x}$$

式A-６２に代入して

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} \qquad \text{A-65}$$

を得る。式A-４７、A-５１より

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} - \left\langle \psi \middle| \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = 0$$

式A-６３と比較して

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \qquad \text{A-66}$$

を得る。これよりＦが最小となるｕに対してＨは最大となる。式A-６４、式A-６５は、Ａ－２節で得られた Hamilton の正準方程式である。