平成１4 年度修士論文

超関数の工学への応用

平成１５年２月２５日

高知工科大学大学院　工学研究科　基盤工学専攻　知能機械コース

中瀬　智寿

指導教員　磯村修一

目次

緒言

量子力学の波動関数、集中荷重を受ける梁の撓みの方程式、超音速飛翔物体の圧力分布を表す方程式などは、２階または４階の偏微分方程式となるが、ヘビサイド関数のように不連続に変化する関数はこれらの方程式の解となりうるのか？という疑問が常につきまとう。
ヘビサイド関数 u(x)は x=0 において通常の微分は不可能であるから、理論的にはこのような方程式の解となりえないことは明白である。しかし現実にはこのような解は存在するのである。
例えば、クレーンの現場において、クレーン吊り荷の振れは通常加速度の代わりにトロリー速度で制御される。しかしながら、クレーン吊り荷の動きは直接的にはトロリーの位置にも速度にも影響を受けず、力から影響をうける、すなわちトロリー速度は加速度に転換されねばならない。そこで、トロリーの速度曲線が与えられた時、加速度を得るために速度を微分する必要がある。
ヘビサイド関数が、言い換えるなら、ステップ入力関数が吊り荷の振れの制御システムへ速度入力として与えられる時、ステップ入力関数は微分されなくてはならない。ヘビサイド関数（制御ではステップ入力関数）が制御系に入力として与えられたとき、ｎ次元空間R^nで定義されたこの入力は微分によって、１点で幅が０、高さ∞、面積が１のδ－関数となり、関数の定義領域R^nからはみ出してしまう。ラプラス変換に基づいた制御理論などでは、このような微分を無神経に行っているが、ステップ入力を微分してδ－関数を求め系のインパルス応答を計算するには数学的に疑義がある。
そこで、運動方程式を超関数の微分方程式に書き換えれば、微分は部分積分によって無限回微分可能なテスト関数の積分におきかえられ、上記の問題は回避される。微分する事のできない速度曲線が存在しない時、実際の制御システムではそのような問題が存在しない。なぜなら、トロリー・モーターを加速するにはある有限な時間が必要で、加速度曲線は吊り荷の振れ制御のための運動方程式の微分による速度曲線から導く事が可能であるからである。

１　ラプラス変換の問題点

R ^{n} 領域での関数 f(x)のラプラス変換の定義は

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx \tag{1.1}$$

となる。f(x)の導関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ のラプラス変換は

$$\int_0^{\infty}\frac{df(x)}{dx}e^{-sx}dx=\left[f(x)e^{-sx}\right]_0^{\infty}-\int\left\{-sf(x)e^{-sx}\right\}dx$$

$$=-f(0)+\int sf(x)e^{-sx}dx$$

$$=-f(0)+sF(s) \tag{1.2}$$

となる。

x=0 において不連続であるヘビサイド関数 u(x)

$$u(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases} \tag{1.3}$$

に、これらのラプラス変換の公式を適用すると、

$$U(s)=\int_0^{\infty}u(x)e^{-sx}dx$$

$$=\int_0^{\infty}1\cdot e^{-sx}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{s} \tag{1.4}$$

となる。

ディラックは量子力学の固有値問題で、ヘビサイド関数の導函数として以下の有名なδ関数、

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases} \tag{1．5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \tag{1.6}$$

を導入した。

しかし、この関数は数学的に厳密ではない。なぜなら、もしｘ=0 のときδ（0）＝∞となる。

δ(ｘ)のラプラス変換は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}\delta(x)e^{-sx}dx &= \int_{0}^{\infty}\frac{du(x)}{dx}e^{-sx}dx\\ &= \left[u(x)e^{-sx}\right]_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty}\left\{-su(x)e^{-sx}\right\}dx\\ &= s\int_{0}^{\infty}u(x)e^{-sx}dx\\ &= sU(s)=s\frac{1}{s}=1 \end{aligned}\tag{1.7}$$

つまり、ラプラス関数の微分とは、関数が微分できようができまいが、$\frac{d}{dx}$のかわりにｓをかけることである。

一方でインパルス応答、すなわちδ関数入力に対する応答はフーリエ級数で展開される。フーリエ級数は、三角関数のハーモニクス、例えば sin nx、 cns nx、n=1,2,・・・n,・・・、の和から成り立ちこれらは無限回微分することができる。もし、n が有限であれば、sin nx, cos nx, n=1,2,…n、の和から得られるインパルス応答の極限は、無限ではなく有限である。ｎがフーリエ変換領域において無限大になるこの方法は、R^nにおける関数定義の無限大に対応している。

従って、関数 f(x)とｘ軸上$x\to\pm\infty$で０に収束する任意のテスト関数φ(x)とのコンヴォリューション積、もしくは内積$\int_{R^n}f(x)\phi(x)dx$を導入すれば微分可能となることが予想されるのである。

f(x)は微分不可能でもφ(x)が無限回微分可能なテスト関数なら、$\int_{R^n}f(x)\phi(x)dx$は部分積分によって無限回微分可能となる。

２　超関数理論

（１） 超関数の定義

連続関数は次のように定義される。

　　１）f(x)は定義されたＤ領域の全てのｘに対して値f(x)が確定的な通常関数である。

　　２） ｆは連続測度μの密度である。 ｆは 凡関数である。

$$\mu(\phi) = \int_{R^n} f(x)\phi(x)dx \qquad \phi\in D$$

もしくは

$$f(\phi) = \int_{R^n} f(x)\phi(x)dx \qquad \phi\in D \tag{2.1}$$

（２） ディラックの測度

ｘ＝０、すなわち R^n の原点にある質量＋１の測度は、ディラックのδ関数と呼ばれている。

$\phi\in D$ に関して

$$\delta(\phi) = \phi(0) \tag{2.2}$$

はシュワルツの超関数

$$T(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx \tag{2.3}$$

と定義される。

もし、φ(x)を無限回数微分できる連続関数であると仮定すると、T(φ)は f(x)の定義領域は次のように書くことができる。

$$T(\phi) = f(\phi) \tag{2.4}$$

ディラックは量子力学における連続固有値問題の定式化で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{2.5}$$

という性質をもつ

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

を導入した。

しかしながら、この関数は数学的には合理的ではない、なぜならｘ＝０でδ（０）＝∞

となるので R^n からはみだしてしまう。そこでシュワルツは次の超関数を導入した。

$$T(\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\phi(x)dx \tag{2.7}$$

$$T(\phi)=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\phi(x)dx$$

$$=\phi(0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)dx$$

$$=\phi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx$$

$$=\phi(0) \tag{2.8}$$

彼は $\delta(\phi)$ を

$$\delta(\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\phi(x)dx \tag{2.9}$$

と定義した。これは測度と呼ばれている。

（３） 超関数の導関数

$\phi\in D$ の時に、定義によると

$$f(\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi(x)dx \tag{2.10}$$

となり、次を得る。

$$\frac{\partial f(\phi)}{\partial x}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\phi(x)dx$$

$$=\left[f(x)\phi(x)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}dx$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}dx \tag{2.11}$$

定義から

$$f(\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi(x)dx$$

$\phi\to\frac{\partial\phi(x)}{\partial x},\frac{\partial f(\phi)}{\partial x}$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}dx=-f(\frac{\partial\phi}{\partial x})$$

$$\frac{\partial f(\phi)}{\partial x} = -f\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \tag{2.12}$$

同様に、f(φ)を連続微分をすることができる。したがって、どのような超関数も無限回数微分することができる。

$$D^P f(\phi) = (-1)^P f(D^P \phi) \tag{2.13}$$

したがって、コンパクト集合における積分関数は無限回数微分するとことができる。もし関数が導関数を持たないとき、微分係数は関数でも測度でもない。それは超関数となる。

（４） ヘビサイド関数

ヘビサイド関数の連続導関数を求めると、その関数は不連続である。工学者は u(x)を以下と定義している。

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \tag{2.14}$$

これはステップ入力関数もしくはヘビサイド関数である。関数 u(x)がｘ＝０で定義されないのは重要ではない。もしその関数が超関数ならば、それはｘのすべての値で定義されるからである。

$$u(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\phi(x)dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \phi(x)dx \tag{2.15}$$

u(φ)の導関数 $\frac{du(\phi)}{dx}$ は

$$\frac{du(\phi)}{dx} = -u\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{d\phi(x)}{dx} dx$$

$$= \phi(0)$$

$$= \delta(\phi)$$

となる。

δはディラックの測度を意味する。結局、

$$\frac{du(\phi)}{dx} = \delta(\phi) \tag{2.16}$$

を得る。
連続的かつ０と等しい導函数をもつ原点の補集合である開領域の中では、u(x)は連続である。したがって、$\frac{du}{dx}$の台が原点である事は明確である。ここから連続した導函数を導き出すのは容易である。

$$\frac{d^2u(\phi)}{dx^2}=\frac{d\delta(\phi)}{dx}$$
$$=-\delta(\frac{d\phi}{dx})$$
$$=-\frac{d\phi}{dx}$$

$$\frac{d^2u(\phi)}{dx^2}=\frac{d\delta(\phi)}{dx} \qquad (2.17)$$

$\frac{d\delta(\phi)}{dx}$は原点において－１と等しくなる双極子モーメントとなる。P 階の導函数は次のように定義される。

$$\delta^p(\phi)=(-1)^p\phi^{(p)}(0) \qquad (2.18)$$

３　超関数微分方程式

３－１　常微分方程式への応用

（１）１階線形常微分方程式

次の方程式

$$\frac{dx(t)}{dt}+ax(t)=\delta(t) \tag{3.1}$$

で、x=x(t)は変数で、δ(t)は測度でその値は一定である。x(t)を次のようにおく。

$$x(t)=\alpha u(t)e^{-at} \tag{3.2}$$

$\frac{dx(t)}{dt}$ の超関数は、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}\alpha u(t)e^{-at}\phi(t)dt$$

$$=\left[\alpha u(t)e^{-at}\phi(t)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\alpha u(t)e^{-at}\frac{d\phi(t)}{dt}dt$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\alpha u(t)e^{-at}\frac{d\phi(t)}{dt}dt$$

$$=-\int_{0}^{\infty}\alpha u(t)e^{-at}\frac{d\phi(t)}{dt}dt$$

$$=-\left[\left\{\alpha e^{-at}\phi(t)\right\}_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty}a\alpha e^{-at}\phi(t)dt\right]$$

$$=-\left[\alpha e^{-at}\phi(t)\right]_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty}a\alpha e^{-at}\phi(t)dt$$

$$=\alpha\phi(0)-\int_{-\infty}^{\infty}a\alpha u(t)e^{-at}\phi(t)dt$$

$$=\alpha\phi(0)-a\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-at}\phi(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}\phi(t)dt=\alpha\phi(0)-a\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\phi(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{dx(t)}{dt}+ax(t)\right\}\phi(t)dt=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{dx(t)}{dt}+ax(t)-\alpha\delta(t)\right\}\phi(t)dt=0 \tag{3.3}$$

となる。

したがって、次の方程式を得る。

$$\frac{dx(t)}{dt}+ax(t)=\alpha\delta(t) \tag{3.4}$$

この方程式と（３.１）

$$\frac{dx(t)}{dt}+ax(t)=\delta(t) \tag{3.1}$$

を比較すると、

$\alpha=1$

を得る。

これより、x(t)は

$$x(t)=u(t)e^{-at} \tag{3.5}$$

となる。

$x(t)=u(t)e^{-at}$ を超関数を用いずに、微分すると以下になる。

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}\{u(t)e^{-at}\}$$

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}u(t)e^{-at}-au(t)e^{-at}$$

$$\frac{d}{dt}x(t)+ax(t)=\frac{d}{dt}u(t)^{-at}-au(t)e^{-at}+au(t)^{-at}$$

$$\frac{d}{dt}x(t)+ax(t)=\delta(t)e^{-at}$$

この方程式と（３.１）

$$\frac{dx(t)}{dt}+ax(t)=\delta(t) \tag{3.1}$$

を比べると、超関数と通常の関数との違いがわかる。

（２）２階線形微分方程式

２階微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=\delta(t) \tag{3.6}$$

を考える。

x(t)を以下のようにおく。

$$x(t)=\alpha u(t)\sin\omega t \tag{3.7}$$

という解、すなわち、ステップ入力関数と $\sin\omega$ の積を仮定すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2x(t)}{dt^2}\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2}{dt^2}\{\alpha u(t)\sin\omega t\}\phi(t)dt$$

$$=\left[\frac{d}{dt}\{\alpha u(t)\sin\omega t\}\phi(t)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\{\alpha u(t)\sin\omega t\}\frac{d}{dt}\phi(t)dt$$

$$= -\left[\alpha u(t)\sin\omega t \frac{d}{dt}\phi(t)\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha u(t)\sin\omega t \frac{d^2}{dt^2}\phi(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} \alpha \sin\omega t \frac{d^2}{dt^2}\phi(t)dt$$

$$= \left[\alpha u(t)\sin\omega t \frac{d}{dt}\phi(t)\right]_{-\infty}^{\infty} - \omega\alpha\int_0^{\infty} \cos\omega t \frac{d}{dt}\phi(t)dt$$

$$= -[\omega\alpha\cos\omega t\phi(t)]_0^{\infty} - \omega^2\alpha\int_0^{\infty}\sin\omega t\phi(t)dt$$

$$= -\omega\alpha\phi(0) - \omega^2\alpha\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\sin\omega t\phi(t)dt$$

$$= \omega\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt - \omega^2\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi(t)dt$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2x(t)}{dt^2}\phi(t)dt = \omega\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt - \omega^2\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \varpi^2 x(t) - \omega\alpha\delta(t)\}\phi(t)dt = 0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) - \omega\alpha\delta(t) = 0 \qquad (3.8)$$

となる。

この式を方程式（3.6）

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = \delta(t) \qquad (3.6)$$

と比較すると、

$$\omega\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{\omega}$$

を得る。

よって、方程式（3.7）は

$$x(t) = \frac{1}{\omega}u\sin\omega t$$

となる。

この方程式を、超関数を用いずに微分すると

$$x(t) = \frac{1}{\omega}u\sin\omega t$$

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{\omega}(\dot{u}(t)\sin\omega t+\omega u(t)\cos\omega t)$$

$$\ddot{x}(t)=\frac{1}{\omega}(\ddot{u}(t)\sin\omega t+2\omega\dot{u}(t)\cos\omega t-\omega^2 u(t)\sin\omega t)$$

$$\ddot{x}(t)=\frac{1}{\omega}(\dot{\delta}(t)\sin\omega t+2\omega\delta(t)\cos\omega t-\omega^2 u(t)\sin\omega t)$$

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=\frac{1}{\omega}(\dot{\delta}(t)\sin\omega t+2\omega\delta(t)\cos\omega t)$$

となる。

この方程式と方程式（3.6）

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2 x(t)=\delta(t) \qquad (3.6)$$

を比較すると、超関数と通常の関数との違いが理解できる。

３－２　偏微分方程式への応用

（１）初期値問題による解法

次の偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3.7)$$

$(-\infty\le x\le\infty, 0\le t\le\infty)$

を考える。この方程式（３．７）を変換すると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (3.7')$$

となる。

関数 u を

$$u=u(x,t) \qquad (3.8)$$

とおく。この関数を初期条件、

$$u(x,0)=f(x) \qquad (3.9)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x) \qquad (3.10)$$

$(-\infty\le x\le\infty)$

のもとで考える。

方程式（３．７'）を解くには次の１）、２）の方法がある。

１）フーリエ変換

２）ラプラス変換

しかし、ここでは、ダランベールの座標変換による解法を示す。

まず、座標(x,t)を用いて座標(ξ,η)を

$$\xi = x + ct \tag{3.11}$$

$$\eta = x - ct \tag{3.12}$$

と仮定する。この２つの方程式から、

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = c$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -c$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$= c\frac{\partial u}{\partial \xi} - c\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) - c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\left(c\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - c\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) - c\left(c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \tag{3.13}$$

を得る。同様に、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} \qquad (3.\ 14)$$

を得る。

方程式（３．１３）$-C^2\times$方程式（３．１４）と方程式（３．７'）より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)-c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)$$

$$=-4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

となり、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \qquad (3.\ 15)$$

を得る。

方程式（３．１５）をξで積分すると、

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\Phi(\eta)$$

を得る。$\Phi=\Phi(\eta)$はηの任意の関数である。

$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\Phi(\eta)$を$\eta$で積分すると

$$u(\xi,\eta)=\phi(\eta)+\varphi(\xi) \qquad (3.\ 16)$$

より、

$$\phi(\eta)=\int\Phi(\eta)d\eta$$

となる。

関数$\phi=\phi(\eta)$ (3.17)

と

関数$\varphi=\varphi(\xi)$ (3. 18)

はそれぞれηとξの任意の関数である。

関数（３．１６）に式（３．１１）と式（３．１２）を代入すると、

$$u(x,t)=\phi(x-ct)+\varphi(x+ct) \qquad (3.\ 19)$$

を得る。これは方程式（３．７'）の一般的な解である。

関数（３．１９）は波が右へ動く任意の波動関数$\phi(x-ct)$と、左へ動く任意の波動関数$\varphi(x+ct)$の和である。

関数$\phi(x-ct)$と$\varphi(x+ct)$は初期条件（３．９)、（３．１０）によって決定される。この初

期条件を関数（３．１９）に代入すると、

$$\phi(x)+\varphi(x)=f(x) \tag{３．２０}$$

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial t}=\frac{\partial\phi(x)}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=-c\frac{\partial\phi(x)}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}=c\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\xi}$$

を得る。

t=0 のとき、$\xi=\eta=x$ より、

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial t}=-c\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t}=c\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$$

となる。

初期条件（３.１０）と関数（３.１９）から

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{\partial\phi(x)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t}=g(x)$$

$$-c\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}+c\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}=g(x) \tag{３.２１}$$

を得る。

この方程式（３.２１）を、$\xi=x_0$ から $\xi=x$ の範囲で積分すると

$$-c\phi(x)+c\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}g(\xi)d\xi+K$$

$$-\phi(x)+\varphi(x)=\frac{1}{c}\{\int_{x_0}^{x}g(\xi)d\xi+K\} \tag{３.２２}$$

となる。

式（３．２０）と式（３．２１）から、ｔ＝０のとき、

$$\phi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-\frac{1}{c}\left\{\int_{x_0}^{x}g(\xi)d\xi+K\right\}\right] \tag{３.２３}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{1}{c}\left\{\int_{x_0}^{x}g(\xi)d\xi+K\right\}\right] \tag{３.２４}$$

を得る。

また、$t\geq 0$ のとき

$$\phi(x-ct)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)-\frac{1}{c}\left\{\int_{x_0}^{x-ct}g(\xi)d\xi+K\right\}\right] \tag{３.２５}$$

$$\varphi(x+ct)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+\frac{1}{c}\left\{\int_{x_0}^{x+ct}g(\xi)d\xi+K\right\}\right] \tag{３.２６}$$

を得る。

一般的な解（３.１９）に式（３.２５）と式（３.２６）を代入すると

$$u(x,t)=\phi(x-ct)+\varphi(x+ct) \tag{3.19}$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)-\frac{1}{c}\left\{\int_{x_0}^{x-ct}g(\xi)d\xi+K\right\}\right]+\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+\frac{1}{c}\left\{\int_{x_0}^{x+ct}g(\xi)d\xi+K\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\{f(x-ct)+f(x+ct)\}+\frac{1}{2c}\left\{\int_{x_0}^{x+ct}g(\xi)d\xi-\int_{x_0}^{x-ct}g(\xi)d\xi\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{f(x-ct)+f(x+ct)\}+\frac{1}{2c}\left\{\int_{x_0}^{x+ct}g(\xi)d\xi+\int_{x-ct}^{x_0}g(\xi)d\xi\right\}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x-ct)+f(x+ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)d\xi \tag{3.27}$$

を得る。

例：長方形の運動の場合

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & -1<x<1\\ 0 & x\leq -1,\ x\geq 1\end{cases}$$

$x+ct=-1$ もしくは $x-ct=1$ とき、導関数 $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t},\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ は存在しない。これは u(x,0) は x で微分することができないことを表している。図であらわすと以下の図１になる。

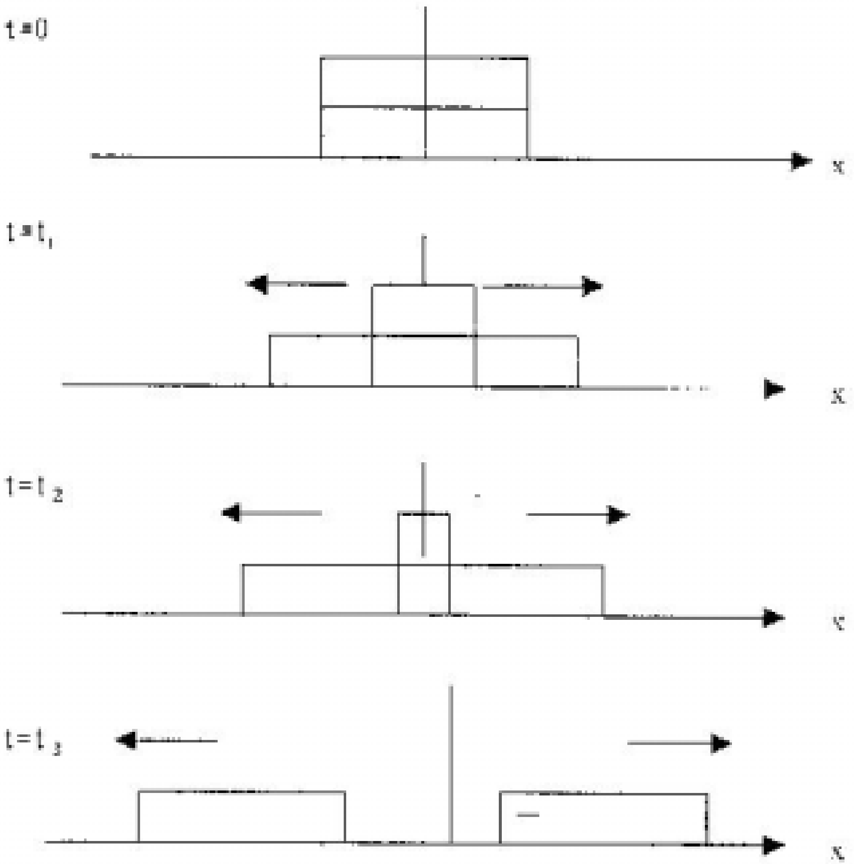

図１

（２）微分作用素

衝撃波などを表す不連続なステップ入力関数 u(x)は微分方程式の解には入らない。

$$Lf(x)=0 \quad -\infty\leq x\leq\infty \qquad (3.28)$$

なぜなら、式（３．２８）は微分することができないからである。L は例えば、$\dfrac{d}{dx}$ もしくは $\dfrac{d^2}{dx^2}$ のように常微分作用素とする。

しかし、関数 f(x)を超関数へと拡張するならば、不連続関数 u(x)は微分方程式(３.２８)の解

に含む事ができる。
次のテスト関数、

$$\phi(x)|_{-\infty}^{\infty}=0 \tag{3.29}$$

の場合、この関数に対して方程式（３．２８）の両辺の内積をとり

$$\langle Lf,\phi\rangle=\langle 0,\phi\rangle=0 \tag{3.30}$$

を考える。

$L=\frac{d}{dx}$ とおくと

$$\langle Lf,\phi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}\phi(x)dx \tag{3.31}$$

$$\langle Lf,\phi\rangle=\left[f(x)\phi(x)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{d\phi(x)}{dx}dx \tag{3.32}$$

となる。
境界条件から

$$\left[f(x)\phi(x)\right]_{-\infty}^{\infty}=0 \tag{3.33}$$

であるから、

$$\langle Lf,\phi\rangle=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{d\phi(x)}{dx}dx$$

$$\therefore\langle Lf,\phi\rangle=-\langle f,-L\phi\rangle \tag{3.34}$$

となる。

また、$L=\frac{d^2}{dx^2}$ ならば

$$\langle Lf,\phi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\phi(x)dx \tag{3.35}$$

$$\langle Lf,\phi\rangle=\left[\frac{df(x)}{dx}\phi(x)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx}dx$$

となり、境界時間から

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\phi(x)\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

$$\langle Lf,\phi\rangle=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx}dx$$

$$\left\langle Lf,\phi\right\rangle = -\left[f(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}dx$$

$$\left\langle Lf,\phi\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}dx \qquad (3.36)$$

$$\therefore \left\langle Lf,\phi\right\rangle = \left\langle f,L\phi\right\rangle \qquad (3.37)$$

となる。

一般的に、$L=\dfrac{d^n}{dx^n}$ の公式を求めると、

$$\left\langle Lf,\phi\right\rangle = -\left\langle f,(-1)^n L\phi\right\rangle \qquad (3.38)$$

となる。
したがって、直接に方程式（３．２８）の解が存在しなかったとしても、

$$\left\langle f,L\phi\right\rangle = 0$$

を満たす、ｆがあれば、それを超関数的解と考える事ができる。この解を“弱い解”という。
この考え方は、L が偏微分作用素の場合でも適用する事ができる。L を次のようにおくと、

$$\begin{aligned} L &= \Delta \\ &= \nabla^2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \qquad (3.39)$$

となる。条件をそれぞれ、

$$f = f(x,y,z) \qquad (3.40)$$

$$\phi = \phi(x,y,z) \qquad (\phi = 0; x\to\pm\infty, y\to\pm\infty, z\to\pm\infty) \qquad (3.41)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \left\langle f,\phi\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta f(x,y,z)\phi(x,y,z)dxdydz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\Delta\phi(x,y,z)dxdydz \end{aligned}$$

$$\left\langle \Delta f,\phi\right\rangle = \left\langle f,\Delta\phi\right\rangle \qquad (3.42)$$

となる。

（３）ヘビサイド波動関数による解法

次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(x,t)=0 \tag{3.43}$$

を考える。
まず、二つの波形を次のヘビサイド関数 u=u(x,t)

$$f(x,t)=\alpha\{1-u(x-at)\} \tag{3.44}$$

であらわす。
この方程式（3．44）のαは一定である。この式に以下のように条件

$x<at:u(x-at)=0,\ f(x,t)=\alpha$

$x>at:u(x-at)=1,\ f(x,t)=0$

を与え、図であらわすと図２になる。

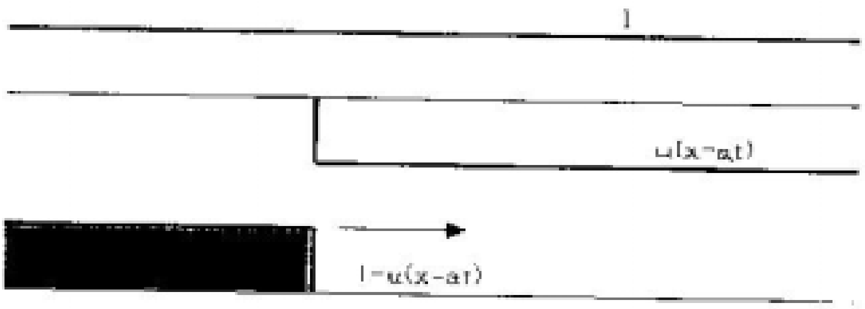

図２

通常の微分を用いた解法では、

$$\xi=x+at \tag{3.45}$$

$$\eta=x-at \tag{3.46}$$

とおく。これより、

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=-\alpha\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi}-a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=-\alpha a\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\right\}$$

$$=-\alpha a\left\{\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)-\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}-a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=-\alpha a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \tag{3.47}$$

となる。同様に、

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\alpha\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\alpha a\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right\}$$

$$=-\alpha a\left\{\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=-\alpha a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \qquad (3.48)$$

となる。次に

（３.４７）－a^2×（３.４８）を求めると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4\alpha a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0 \qquad (3.49)$$

を得る。

δ関数はヘビサイド関数の微分より求める事ができ、

$$\delta(x)=\frac{du(x)}{dx}$$

となる。この式と方程式（３．４４）より、

$$f(x,t)=\alpha\{1-u(x-at)\} \qquad (3.44)$$

$$\frac{f(x,t)}{dt}=\alpha a\delta(x-at)$$

$$\frac{f^2(x,t)}{dt^2}=-\alpha a^2\frac{\partial \delta(x-at)}{\partial \eta} \qquad (3.50)$$

を得る。同様に

$$\frac{f(x,t)}{dx}=-\alpha\delta(x-at)$$

$$\frac{f^2(x,t)}{dx^2}=-\alpha\frac{\partial \delta(x-at)}{\partial \eta} \qquad (3.51)$$

を得る。次に

（３.５０）－a^2×（３.５１）を求めると

$$\frac{f^2(x,t)}{dt^2}-a^2\frac{f^2(x,t)}{\partial x^2}=0 \qquad (3.52)$$

を得る。この方程式は、方程式（３.４３）を満たす。

（４）超関数による微分方程式の解法

L を偏微分作用素、

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{3.53}$$

とおく。方程式（３．２８）と（３．４４）より

$$\langle Lf,\phi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right)\phi(x,t)dxdt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\left(\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\right)dxdt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\{1-u(x-at)\}\left(\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\right)dxdt$$

$$\langle Lf,\phi\rangle=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{at}\left(\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\right)dxdt$$

$$\langle Lf,\phi\rangle=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x<at}\left(\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\right)dxdt$$

を得る。次に式（３．５４）と（３．５５.）

$$\xi=x+at \tag{3.54}$$

$$\eta=x-at \tag{3.55}$$

の条件、$\phi(x,t)=\phi(\xi,\eta)$ から

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=a\frac{\partial\phi}{\partial\xi}-a\frac{\partial\phi}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=a\left\{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\right\}$$

$$=a\left\{\left(a\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}-a\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\right)-\left(a\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}-a\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right) \tag{3.56}$$

を得る。同様に、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} \tag{3.57}$$

を得る。この方程式と式（３．５６）より、次のような計算をすると、

（３.５６）－a^2×（３.５７）

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=-4a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} \tag{3.58}$$

を得る。

また、式（３.５４）と（３.５５）から

$$x=\frac{\xi+\eta}{2}$$

$$t=\frac{\xi-\eta}{2a}$$

$$dx=\frac{d\xi+d\eta}{2}$$

$$dt=\frac{d\xi-d\eta}{2a}$$

$$dxdt=\frac{d\xi+d\eta}{2}\frac{d\xi-d\eta}{2a}=\frac{(d\xi)^2-(d\eta)^2}{4a}$$

を得る。x,ξ,η を次の条件、

$x\to\infty,\xi\to\infty,\eta\to\infty$

$x\to-\infty,\xi\to-\infty,\eta\to-\infty$

$x\to\infty,\xi\to\infty,\eta\to-\infty$

$x\to-\infty,\xi\to-\infty,\eta\to\infty$

で考えたとき、$x=at,\xi=2at,\eta=0$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{at}\left(\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\right)dxdt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{-\infty}\left(-4a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{(d\xi)^2-(d\eta)^2}{4a}\right)$$

$$=-a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}(d\xi)^2+a\int_{0}^{-\infty}\int_{0}^{-\infty}\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}(d\eta)^2$$

$$=-a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi+a\int_{0}^{-\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta$$

$$=-a\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi+\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta\right)$$

$$=-a\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta\right)$$

$$= -a\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta = \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial x}dx$$

となる。

この方程式に、

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = a$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -a$$

を代入すると

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta = \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{-1}{a}adt + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{1}{a}(-a)dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx$$

$$= -\frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx - \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx$$

$$= 2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx - \frac{\partial\phi}{\partial t}dt\right)$$

得る。この方程式と（３.４１）から（３.４３）は

$$\langle Lf,\phi\rangle = \alpha\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\right)dxdt$$

$$= -2\alpha a\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial x}dx - \int_{\infty}^{-\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}dt\right)$$

$$= -2\alpha a\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}dt\right)$$

$$= -2\alpha a\left[\phi(\infty,t) - \phi(-\infty,t) + \{\phi(x,\infty) - \phi(x,-\infty)\}\right]$$

となる。

３－３ヘビサイド波動関数

（１）ヘビサイド波動関数の右方向への広がり

次の波動方程式（３．４３）

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(x,t)=0 \qquad (3.43)$$

で、ヘビサイド関数における解を考える。
２つの方形波をヘビサイド関数 u=u(x,t)によって表すと、

$$v(x,t)=u(x-at)-u(x-at-\tau) \qquad (3.59)$$

$$w(x,t)=u(x+at)-u(x+at-\tau) \qquad (3.60)$$

となる。この関数より、 $f(x,t)$ を

$$f(x,t)=\alpha\{v(x,t)+w(x,t)\} \qquad (3.61)$$

と仮定する。αとτは一定である。
ｘとαｔを条件わけすると、（３．５９）と（３．６０）から、

$x<at:u(x-at)=0,u(x-at-\tau)=0\therefore v(x,t)=0$

$at<x<at+\tau:u(x-at)=1,u(x-at-\tau)=0\therefore v(x,t)=1$

$x>at+\tau:u(x-at)=1,u(x-at-\tau)=1\therefore v(x,t)=0$

$x<-at:u(x+at)=0,u(x+at-\tau)=0\therefore w(x,t)=0$

$-at<x<-at+\tau:u(x+at)=1,u(x-at-\tau)=0\therefore w(x,t)=1$

$x>-at+\tau:u(x+at)=1,u(x+at-\tau)=1\therefore w(x,t)=0$

を得る。
これを図にすると図３のようになる。

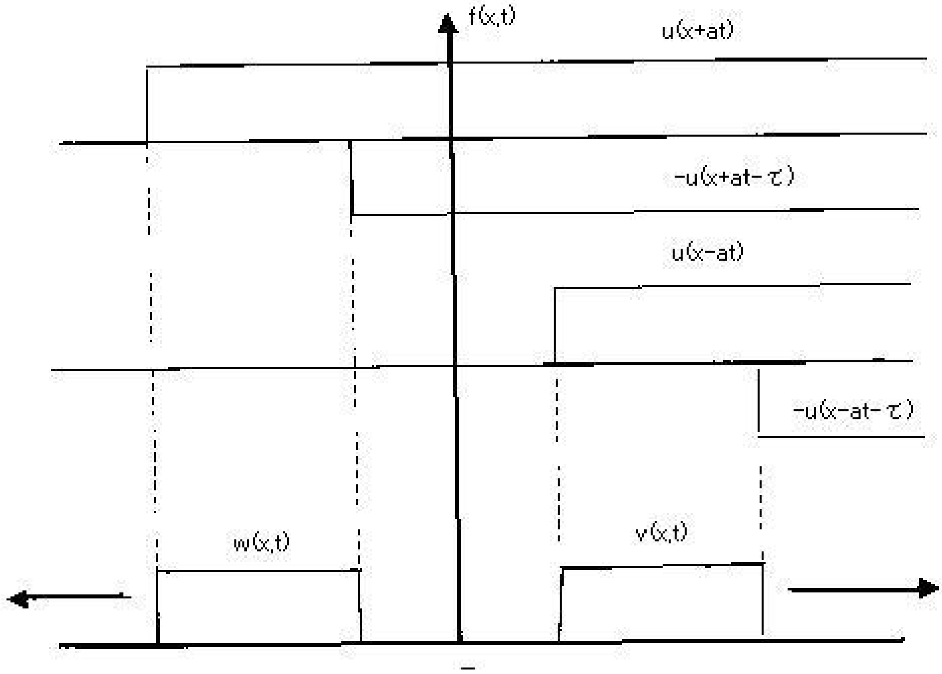

図３

（２）古典的な微分

ξ, η をそれぞれ、

$$\xi = x + at \tag{3.62}$$

$$\eta = x - at \tag{3.63}$$

とおく。また方程式（３．５９)、（３．６０）を（３．６１）代入すると、

$$f(x,t) = \alpha\{u(x-at) - u(x-at-\tau) + u(x+at) - u(x+at-\tau)\} \tag{3.61'}$$

となる。

これらの方程式から、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \eta} + a\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

を得る。同様に

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \eta} + a\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

を得る。

以上のように、 $x - at = 0, x - at - \tau = 0, x + at = 0$ そして $x + at - \tau = 0$ のような条件では f(x)が微分できないにもかかわらず、無神経に微分をおこなってきた。ヘビサイド関数を直接微分することはできない。

（３）ヘビサイド関数へδ関数の導入

$$\delta(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

とδ関数と定義する。次に方程式（３．６１'）

$$f(x,t) = \alpha\{u(x-at) - u(x-at-\tau) + u(x+at) - u(x+at-\tau)\} \tag{3.61'}$$

より、上記のδ関数を考慮して、微分を行うと、

$$\frac{f(x,t)}{dt} = \alpha\{-a\delta(x-at) + a\delta(x-at-\tau) + a\delta(x+at) - a\delta(x+at-\tau)\}$$

$$\frac{f^2(x,t)}{dt^2} = \alpha\left\{a^2\frac{\partial\delta(x-at)}{\partial\eta} - a^2\frac{\partial\delta(x-at-\tau)}{\partial\eta} + a^2\frac{\partial\delta(x+at)}{\partial\xi} - a^2\frac{\partial\delta(x+at-\tau)}{\partial\xi}\right\}$$

$$\frac{f^2(x,t)}{dt^2} = \alpha a^2\left[\left\{\frac{\partial\delta(x-at)}{\partial\eta} + \frac{\partial\delta(x+at)}{\partial\xi}\right\} - \left\{\frac{\partial\delta(x-at-\tau)}{\partial\eta} - \frac{\partial\delta(x+at-\tau)}{\partial\xi}\right\}\right] \tag{3.64}$$

となる。同様に

$$\frac{f(x,t)}{dt}=\alpha\{\delta(x-at)-\delta(x-at-\tau)+\delta(x+at)-\delta(x+at-\tau)\}$$

$$\frac{f^2(x,t)}{dx^2}=\alpha\left\{\frac{\partial\delta(x-at)}{\partial\eta}-\frac{\partial\delta(x-at-\tau)}{\partial\eta}+\frac{\partial\delta(x+at)}{\partial\xi}-\frac{\partial\delta(x+at-\tau)}{\partial\xi}\right\}$$

$$\frac{f^2(x,t)}{dx^2}=\alpha\left[\left\{\frac{\partial\delta(x-at)}{\partial\eta}+\frac{\partial\delta(x+at)}{\partial\xi}\right\}-\left\{\frac{\partial\delta(x-at-\tau)}{\partial\eta}-\frac{\partial\delta(x+at-\tau)}{\partial\xi}\right\}\right]$$

(3.6 5)

となる。

次に、（3.6 4）－a^2×（3.6 5）から

$$\frac{f^2(x,t)}{dt^2}-a^2\frac{f^2(x,t)}{dx^2}=0 \qquad (3.6\ 6)$$

を得る。

よって、（3．６６）は（3.4 3）

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(x,t)=0 \qquad (3.\ 4\ 3)$$

を満たす。

（4）超関数による解法

L を偏微分作用素、

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (3.5\ 3)$$

とおくと、

$$\langle Lf,\phi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right)\phi(x,t)dxdt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\left(\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\right)dxdt$$

$$=< f,L\phi > \qquad (3.6\ 7)$$

となる。この式を考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\right)dxdt \qquad (3.6\ 8)$$

とおき、、この式に以下の条件

$$\xi = x + at \qquad (3.62)$$

$$\eta = x - at \qquad (3.63)$$

$$\phi(x,t) = \phi(\xi,\eta)$$

を仮定すると、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = a\left\{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\right\}$$

$$= a\left\{\left(a\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - a\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\right) - \left(a\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial\xi} - \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right) \qquad (3.69)$$

となる。同様に

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} \qquad (3.70)$$

を得る。

次に、（３．６９）－（３．７０）を求めると、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -4a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} \qquad (3.71)$$

となる。

また、式（３．６２）と（３．６３）より

$$x = \frac{\xi+\eta}{2}$$

$$t = \frac{\xi-\eta}{2a}$$

$$dx = \frac{d\xi + d\eta}{2}$$

$$dt = \frac{d\xi - d\eta}{2a}$$

$$dxdt = \frac{d\xi + d\eta}{2}\frac{d\xi - d\eta}{2a} = \frac{(d\xi)^2 - (d\eta)^2}{4a}$$

を得る。これらの式は以下の条件、

$$x \to \infty, \xi \to \infty, \eta \to \infty$$

$$x \to -\infty, \xi \to -\infty, \eta \to -\infty$$

$x \to \infty, \xi \to \infty, \eta \to -\infty$

$x \to -\infty, \xi \to -\infty, \eta \to \infty$

のもとで考える。

よって、（３．６８）より、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{at}\left(\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\right)dxdt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{-\infty}\left(-4a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{(d\xi)^2-(d\eta)^2}{4a}\right)$$

$$= -a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}(d\xi)^2 + a\int_{\infty}^{-\infty}\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}(d\eta)^2$$

$$= -a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi + a\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta$$

$$= -\left(a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi + a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta\right)$$

$$= -a\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta = \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial x}dx$$

を得る。

これに次の値、

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = a$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -a$$

を代入すると、

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\xi + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}d\eta = \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{-1}{a}adt + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{1}{a}(-a)dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx$$

$$= -\frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx - \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx$$

$$= 2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx - \frac{\partial\phi}{\partial t}dt\right)$$

となる。

したがって、（３.６８）は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\right)dxdt=-2a\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial x}dx-\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}dt\right)$$

$$=-2a\left[\phi(\infty,t)-\phi(-\infty,t)-\{\phi(x,-\infty)-\phi(x,\infty)\}\right]$$

$$=0$$

となり、（３．６７）より、

$$\langle Lf,\phi\rangle=\langle L,f\phi\rangle=0$$

を得る。

４　クレーン制御への応用

４－１　数学的なモデル

クレーン吊り荷の振れ制御システムにおける基礎方程式を示す。その際、

ー吊り荷の縦方向運動

ーコリオリの力

ーロープの弾力

を考慮した。

クレーン吊り荷の運動は参考文献［１］によって、次の微分方程式によって記述できる。

$$\ddot{r}+\ddot{z}\sin\theta-r\dot{\theta}^2-g\cos\theta+\frac{k}{m}r=Q_r \qquad (4.1)$$

$$\ddot{\theta}+2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}+\frac{\ddot{z}}{r}\cos\theta-\frac{g}{r}\sin\theta=\frac{1}{mr}Q_\theta \qquad (4.2)$$

ｒ：ロープの長さ

θ：揺れの角度

ｇ：重力

ｋ：ロープの弾性定数

ｍ：荷物の重量

Q_r ：ロープ張力

ｚ：トロリーの位置

Q_θ：荷物にかかるトルク

$2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}$の期間はコリオリの加速度として知られている。

４－２　インパルス応答

クレーン吊り荷の運動は、θが小さいとき、コリオリ力を無視して、$\sin\theta=0,\cos\theta=1$

とすると次の２階微分方程式によって表される。

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\omega^2\theta(t)=\delta(t) \qquad (4.3)$$

ここで、$\omega^2=\dfrac{g}{r}$である。

$$\theta(t)=\alpha u(t)\sin\ \omega t \qquad (4.4)$$

という解、すなわち、ステップ入力関数と sinωの積を仮定すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2}{dt^2}\{\alpha u(t)\sin\omega t\}\phi(t)dt$$

$$=\left[\frac{d}{dt}\{\alpha u(t)\sin\omega t\}\phi(t)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\{\alpha u(t)\sin\omega t\}\frac{d}{dt}\phi(t)dt$$

$$=-\left[\alpha u(t)\sin\omega t\frac{d}{dt}\phi(t)\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\alpha u(t)\sin\omega t\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}\alpha\sin\omega t\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)dt$$

$$=\left[\alpha u(t)\sin\omega t\frac{d}{dt}\phi(t)\right]_{0}^{\infty}-\omega\alpha\int_{0}^{\infty}\cos\omega t\frac{d}{dt}\phi(t)dt$$

$$=-\left[\omega\alpha\cos\omega t\,\phi(t)\right]_0^{\infty}-\omega^2\alpha\int_0^{\infty}\sin\omega t\,\phi(t)dt$$

$$=-\omega\alpha\phi(0)-\omega^2\alpha\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\sin\omega t\,\phi(t)dt$$

$$=\omega\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt-\omega^2\int_{-\infty}^{\infty}\theta(t)\phi(t)dt$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\phi(t)dt=\omega\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt-\omega^2\int_{-\infty}^{\infty}\theta(t)\phi(t)dt \tag{4.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\omega^2\theta(t)-\omega\alpha\delta(t)\right\}\phi(t)dt=0$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\omega^2\theta(t)-\omega\alpha\delta(t)=0 \tag{4.6}$$

を得る。

この方程式と方程式（4.3）

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\omega^2\theta(t)=\delta(t) \tag{4.3}$$

を比較すると、

$$\omega\alpha=1$$

$$\alpha=\frac{1}{\omega}$$

を得る。
超関数を用いずに解（４.４）を微分すると

$$\theta = \frac{1}{\omega} u \sin \omega t$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\omega}\left(\dot{u} \sin \omega t + \omega u \cos \omega t\right)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\omega}\left(\ddot{u} \sin \omega t + 2\omega\dot{u} \cos \omega t - \omega^2 u \sin \omega t\right)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\omega}\left(\ddot{u}\sin\omega t + 2\omega\dot{u}\cos\omega t\right) - \omega^2 \times \frac{1}{\omega} u \sin\omega t$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \frac{1}{\omega}\left(\ddot{u}\sin\omega t + 2\omega\dot{u}\cos\omega t\right) \tag{4.7}$$

となる。
したがって、超関数と通常の関数との違いを理解する事ができる。

４－３　振れ止め制御
揺れ制御システムの固有関数を考慮すると、典型的なトロリーの速度と加速度曲線は図４のように表される。

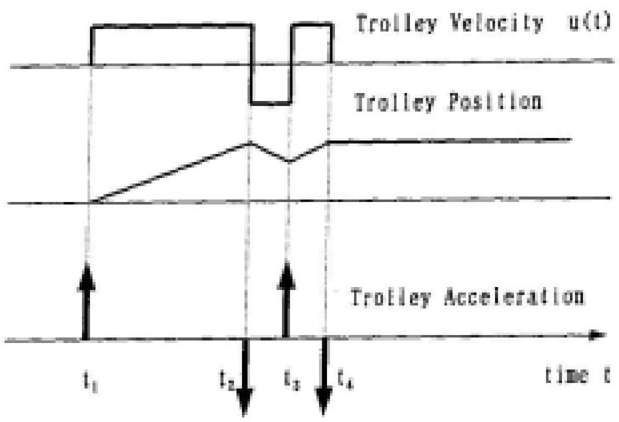

図４
一般に、速度関数ｖ（ｔ）の導関数は次のような超関数であらわされる。

$$v(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i u(t) \tag{4.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t)\phi(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i+\varepsilon}^{t_{i+1}-\varepsilon} \dot{v}(t)\phi(t)dt \qquad (4.9)$$

ｖ（ｔ）を$t_i + \varepsilon < t < t_{i+1} - \varepsilon$の範囲で微分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t)\phi(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[v(t)\phi(t) \right]_{t_i+\varepsilon}^{t_{i+1}-\varepsilon} - \int_{t_i+\varepsilon}^{t_{i+1}-\varepsilon} v(t)\dot{\phi}(t)dt \right\}$$

$$= -\int_{t_i+\varepsilon}^{t_{i+1}-\varepsilon} v(t)\dot{\phi}(t)dt$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[v(t)\phi(t) \right]_{t_i+\varepsilon}^{t_{i+1}+\varepsilon} - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i+\varepsilon}^{t_{i+1}-\varepsilon} \dot{v}(t)\phi(t)dt \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[v(t)\phi(t) \right]_{t_i-\varepsilon}^{t_i+\varepsilon} - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t)\phi(t)dt \qquad (4.10)$$

$t = t_i$のとき$\dot{v}(t) = 0$なら

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t)\phi(t)dt = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(t_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} a_i \delta(t - t_i)\phi(t)dt$$

$$\theta = \frac{1}{\omega} u(t) \sin \omega t \qquad (4.11)$$

となる。

５　コンピュータ・シュミレーション

コンピュータ・シュミレーションの結果は図５、図６のようになる。ここでの加速度入力は図４からえられたものである。

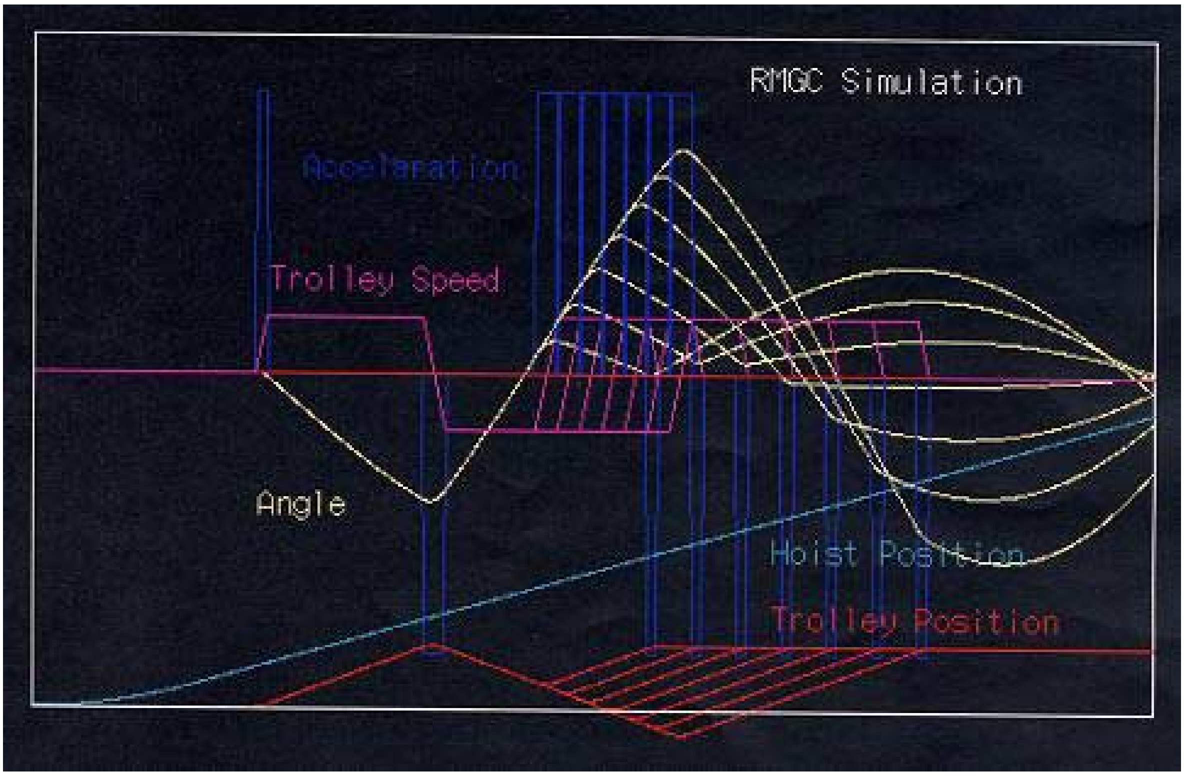

図５

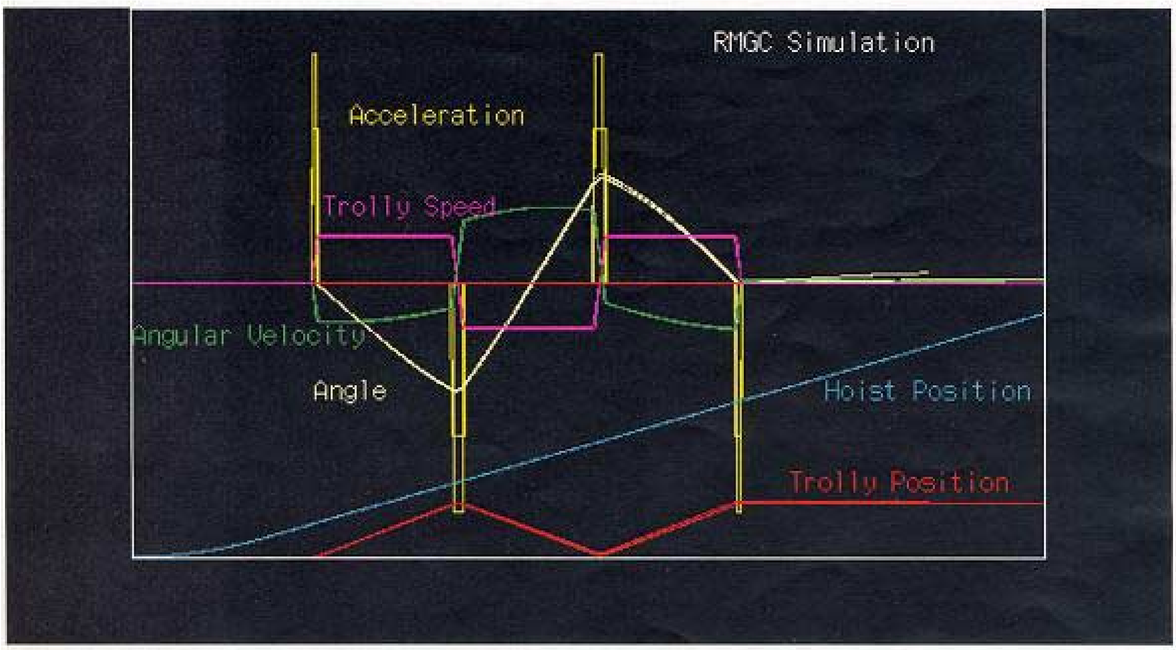

図６

結言

δ関数を入力すると図７が示すように長方形の波形の近似になる。

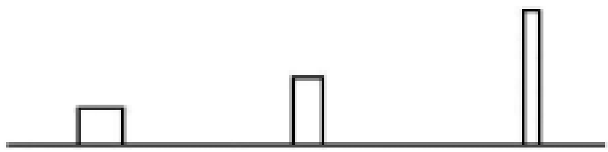

図７

δ関数をこれらの波形が収束した極限と仮定すると、コンピュータ・シュミレーションによって方程式を解く事ができる。つまり、波形は次の方程式へと収束する。

$$\theta = \frac{1}{\omega} u(t) \sin \omega t$$

シュミレーションの結果、面積一定で幅と高さを変化した擬似δ関数を採用したが、計算結果には大して影響ない事を確かめた。

謝辞

本研究を進めるにあたり、御指導して頂いた、磯村修一　教授に深く感謝致します。

参考文献

[1]Laurent Schwartz,"THEORIE DES DISRIBUTIONS",
Hermann&Cie,Paris,1959

[2]Jean-Paul Marchand,"DISTRIBUTIONS an outline",
North-Holland Publishing Company,Amsterdam,1962

[3]Zemanian,A.H."Distribution Theory and Transform Analysis-An Introduction to Generalized Functions, with Applications-",
General Publishing company,ltd.,Toronto,1965

[4]Farlow,Stanley J."PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS for Scientists and Engineers," John Wiley & Sons, Inc.,1982.

[5]http://www9.ocn.ne.jp/~isomura/解析学第 5 編作用素論