

平成15年度修士論文

クレーンのフィードフォワード制御

平成15年2月25日

高知工科大学 大学院 知能機械コース

1055069

柳瀬 一成

指導教員 教授 磯村 修一

目次

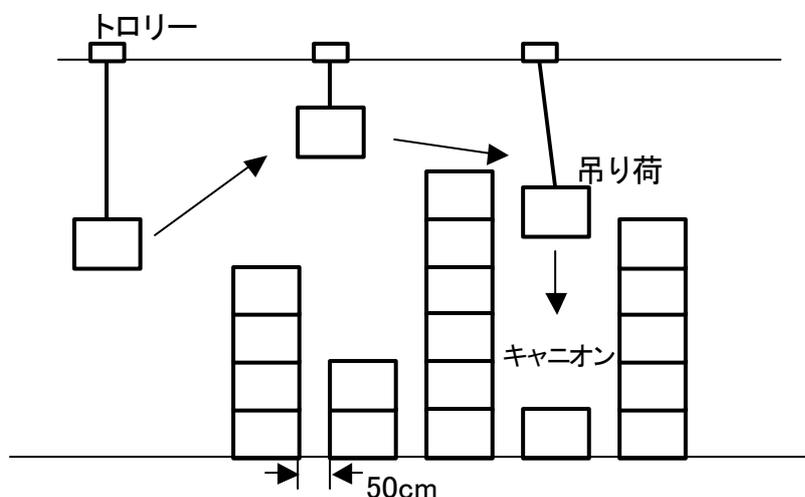
緒言		3
第 1 章	数学モデル	5
第 2 章	最適レギュレータの適用限界	8
第 3 章	フィードフォワード制御	1 2
第 4 章	コンピュータシミュレーション	1 6
結言		2 1
謝辞		
付録 A		2 2

緒言

コンテナターミナルでは、クレーンでコンテナ船からコンテナをヤードに降ろしたり、ヤードからコンテナ船に積み込む際の時間短縮が要求される。この時間が長いとコンテナ船の港での係留時間が長くなり、輸送料が高くなるので船主にとって不利益となる。

クレーンでコンテナすなわち吊り荷を運ぶ際、時間がかかる要因の一つは吊り荷の横揺れ制御性能である。

最近のコンテナヤードではスペースの有効活用のため4段積みから6段積みになりつつある。6段積みでは隣接するコンテナのキャニオンも狭く、深くなり、両サイドのコンテナに接触することなく吊り荷を上げ下げする制御はますます難しくなっている。



従来の制御の主流は最適レギュレータに基づく状態変数フィードバックであった。この方法ではヤードにコンテナを積み込む際、吊り荷を移動したときに生じる吊り荷の振れを制御して、キャニオンの上で静止させて降ろさなければならないため、どうしても時間がかかる。

熟練したオペレータの手動操作を観察すると、必ずしも振れを見てトロリーの速度をコントロールしているわけではない。経験的にフィードフォワード制御をしている。言い換えると頭の中にプログラムされた吊り荷の軌道と操作手順に従って制御しているのである。その制御則とは

1. 吊り荷の上げと下げではコリオリの力に基づく振れの減衰に差がある。すなわちロープの拘束力が下げでは減少し、振れが生じにくい。
2. 振り子と考えたときの支点すなわちトロリーを固有のモードで操作すると振れが生じない。

という事実に基づいている。

本論文ではフィードバック制御に代わるこのオペレータの経験則をプログラムしてコン

コンピュータに組み込むことにより従来平均 50 秒かかっていたのを 30 秒まで短縮することに成功した。

この論文では、振り子として扱われるコンテナクレーン吊り荷の動的なシミュレーションについて述べている。数学モデル化には

- (1) ロープまたはひもの弾力
- (2) コリオリの力
- (3) 振り子の垂直移動

を考慮した。

まず第 1 章で、持ち上げたり左右に移動したりするピボット振り子としてクレーンの数学モデルを記述するために、クレーン吊り荷運動に関するオイラーラグランジュの方程式を導いた。

第 2 章では簡略化したモデルで最適レギュレータに基づく状態変数フィードバックについて述べた。

第 3 章ではフィードバック制御に代わるフィードフォワード制御を提案した。

第 4 章では第 1 章で得られた精密な数学モデルによるシミュレーション結果について述べた。

1 数学モデル

(1) 平面運動 (放射状に交わる構成要素)

ラグランジュの方程式の一般的な形式は付録 A に示すように次のようにあらわされる。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad 1-1$$

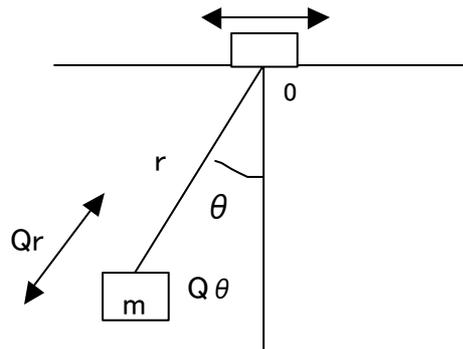
ここで L はラグランジアン、 q_i は n 個の一般化された座標、 Q_i は n 個の一般化された力である。

長さ r のロープで拘束されて運動する質点 m に適用する。

T と U をそれぞれ運動とポテンシャルのエネルギーとして、ラグランジアンは次のようになる。

$$L = T - U \quad 1-2$$

図 1 - 1 振り子の平面運動



記号：

r ： ロープの長さ

θ ： 振れ角度

g ： 重力加速度

k ： ロープのばね定数

m ： 吊り荷質量

Q_r ： ロープの張力

Z ： トロリー位置

Q_θ ： 吊り荷に作用するトルク

運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} m \{ (\dot{x} + \dot{z})^2 + \dot{y}^2 \}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{z} + \dot{z}^2 + \dot{y}^2)$$

1 - 3

である。

直交座標 (x, y) の代わりに極座標 (r, θ) を使って表すと

$$x = r \sin \theta$$

$$y = r \cos \theta$$

となる。

時間 t で微分して

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

したがって運動エネルギーの式 1 - 3 は

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{z} + \dot{z}^2 + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{1}{2} m \left\{ (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta)^2 + 2 (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \dot{z} + \dot{z}^2 + (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} m \left\{ \dot{r}^2 \sin^2 \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2(\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \dot{z} + \dot{z}^2 \right.$$

$$\left. + \dot{r}^2 \cos^2 \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right\}$$

$$T = \frac{1}{2} m \left\{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 2(\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \dot{z} + \dot{z}^2 \right\} \quad 1 - 4$$

となる。

ポテンシャルエネルギー U は

$$U = -mg y + \frac{1}{2} k r^2$$

$$U = -mg r \cos \theta + \frac{1}{2} k r^2$$

1 - 5

と書ける。

式 1 - 4 と式 1 - 5 をラグランジアン の式 1 - 2 に代入して

$$L = \frac{1}{2} m \left\{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 2(\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \dot{z} + \dot{z}^2 \right\} + mg r \cos \theta - \frac{1}{2} k r^2$$

が得られる。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} + m \dot{z} \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 + m \dot{z} \dot{\theta} \cos \theta + m g \cos \theta - k r$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} + m \ddot{z} \sin \theta + m \dot{z} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} + m r \dot{z} \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m \dot{r} \dot{z} \cos \theta - m r \dot{z} \dot{\theta} \sin \theta - m g r \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta} + m \dot{r} \dot{z} \cos \theta + m r \ddot{z} \cos \theta - m r \dot{z} \dot{\theta} \sin \theta$$

であるから、極座標で表されたラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = -Q_r$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -r Q_\theta$$

$$m \ddot{r} + m \ddot{z} \sin \theta - m r \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta + k r = -Q_r$$

$$m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r \ddot{z} \cos \theta + m g r \sin \theta = -r Q_\theta$$

あるいは

$$\ddot{r} + \ddot{z} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 - g \cos \theta + \frac{k}{m} r = -\frac{1}{m} Q_r \quad 1 - 6$$

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \frac{\ddot{z}}{r} \cos \theta + \frac{g}{r} \sin \theta = -\frac{1}{m r} Q_\theta \quad 1 - 7$$

となり、吊り荷の運動方程式が得られる。

ここで $2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta}$ はコリオリの加速度として知られている。

2 最適レギュレータの適用限界

本章では、簡単な振り子モデルを用いて最適レギュレータに基づく状態変数フィードバック制御の限界を示す。コリオリの加速と外部の力を無視すると、式 1 - 7 から

$$\ddot{\theta} = \frac{\alpha}{L} \cos \theta - \frac{g}{L} \sin \theta \quad 2 - 1$$

が得られる。

ここで、 $\alpha = \dot{z}$ および $L = r$

一般に、2次元の状態方程式は次のように表される。

状態方程式：

$$\dot{X} = AX + BU$$

ハミルトニアン：

$$H = -(X^T QX + U^T RU) + \Psi^T (AX + BU)$$

ハミルトンの正準方程式：

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \Psi}$$

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial H}{\partial X}$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0$$

であるから 2次元 \times 2 = 4次元の連立微分方程式

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$\dot{\Psi} = -A^T \Psi + QX$$

が得られる。

状態ベクトル $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

制御ベクトル $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

随伴ベクトル $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$

である。

コントロールは

$$-RU + B\Psi = 0$$

$$U = R^{-1}B\Psi$$

であるから、随伴ベクトルは

$$\Psi = PX$$

とおくと、 U, Ψ を消去して

$$\dot{\Psi} = \dot{P}X + P\dot{X} = -A^T\Psi + QX$$

$$\dot{P}X + P(A^T X + BU) = -A^T PX + QX$$

$$\dot{P}X + P(A^T X + BR^{-1}B\Psi) = -A^T PX + QX$$

$$\dot{P}X + P(A^T X + BR^{-1}BPX) = -A^T PX + QX$$

$$(\dot{P} + PA + A^T P + PBR^{-1}BP - Q)X = 0$$

$X \neq 0$ より、リカッティの方程式を得る：

$$\dot{P} + PA + A^T P + PBR^{-1}BP - Q = 0$$

リカッティ方程式の係数行列を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & \frac{q_{12} + q_{21}}{2} \\ \frac{q_{12} + q_{21}}{2} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11} & \frac{r_{12} + r_{21}}{2} \\ \frac{r_{12} + r_{21}}{2} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

となる。

これらを振り子の運動方程式 2 - 1

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = -\frac{\alpha}{L} \cos \theta$$

に適用する。

振れ幅が小さいと仮定して $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$ としたとき

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{g}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \alpha$$

ここで $\dot{\theta} = \dot{\phi}$ である。

$$x_1 = \phi, x_2 = \theta, u_1 = \alpha, u_2 = 0, \omega^2 = \frac{g}{L} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

となり、リカッティの方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} + p_{12} + p_{21} + cp_{11}^2 - q_{11} & \dot{p}_{12} - \omega^2 p_{11} + p_{22} + cp_{11}p_{12} - q_{12} \\ \dot{p}_{21} + p_{22} - \omega^2 p_{11} + cp_{21}p_{11} - q_{21} & \dot{p}_{22} - \omega^2(p_{12} + p_{21}) + cp_{12}p_{21} - q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ここで } c = \frac{r_{22}}{(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})L^2}$$

$r_{11} = R, r_{12} = r_{21} = 0, p_{12} = p_{21}$ そして $r_{22} \neq 0$ と仮定して

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} + 2p_{12} + \frac{p_{11}^2}{RL^2} - q_{11} & \dot{p}_{12} - \omega^2 p_{11} + p_{22} + \frac{p_{11}p_{12}}{RL^2} - q_{12} \\ \dot{p}_{21} + p_{22} - \omega^2 p_{11} + \frac{p_{12}p_{11}}{RL^2} - q_{21} & \dot{p}_{22} - 2\omega^2 p_{12} + \frac{p_{12}^2}{RL^2} - q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$q_{11} = q_{12} = q_{21} = q_{22} = 1$ のとき

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} + 2p_{12} + \frac{p_{11}^2}{RL^2} - 1 & \dot{p}_{12} - \omega^2 p_{11} + p_{22} + \frac{p_{11}p_{12}}{RL^2} - 1 \\ \dot{p}_{21} + p_{22} - \omega^2 p_{11} + \frac{p_{12}p_{11}}{RL^2} - 1 & \dot{p}_{22} - 2\omega^2 p_{12} + \frac{p_{12}^2}{RL^2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{p}_{11} = -2p_{12} - \frac{p_{11}^2}{RL^2} + 1$$

$$\dot{p}_{12} = \omega^2 p_{11} - p_{22} - \frac{p_{11}p_{12}}{RL^2} + 1$$

$$\dot{p}_{22} = 2\omega^2 p_{12} - \frac{p_{12}^2}{RL^2} + 1$$

である。

もしシステムが安定しているなら、 $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\dot{p}_{11} = 0$$

$$\dot{p}_{12} = 0$$

$$\dot{p}_{22} = 0$$

であり、

正定行列の条件から

$$p_{12} = 0$$

である。

このとき

$$p_{11}^2 = RL^2$$

$$p_{11} = L\sqrt{R}$$

$$p_{22} = 1 + \omega^2 p_{11} = 1 + \omega^2 L\sqrt{R}$$

となり、状態変数フィードバックは次のようになる。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L\sqrt{R} & 0 \\ 0 & 1 + \omega^2 L\sqrt{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -LR^{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

x_2 からのフィードバックは無く、 $x_1 = \dot{x}_2$ からのみであり、最適レギュレータは減衰係数

$LR^{\frac{3}{2}}$ を与える。

3 フィードフォワード制御

3 - 1 振れ止め制御へのコリオリ加速度の効果

振れ止めの抑制効果はロープの長さの変化として式 1-7 に表れる $2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}$ によってもたらされると考えられる。これはコリオリの加速度と呼ばれるものである。ロープの長さは常に正なので、

(1) $\dot{r} > 0$ のとき 吊り荷は下方へ移動

$2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}$ の抑制機能が積極的に働くので揺れが減少してシステムが安定する。

(2) $\dot{r} < 0$ のとき 吊り荷は上方へ移動

$2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}$ の抑制機能は逆効果となり揺れが増幅しシステムが不安定になる。

吊り荷が下方へ移動するとき、強制的な力が静まるのにしたがって、吊り荷の動きは自由になり、結果揺れは減少する。吊り荷が垂直に振動する場合、ロープの弾力のため、ロープの長さの効果は動揺制御システムを安定するように改善する。よく訓練されたクレーンのオペレータは、経験的に吊り荷が下方へ移動すると振動が安定するという事実を知っている。

3 - 2 振れを生じない加速度入力

2 - 1 式

$$\ddot{\theta} = \frac{\alpha}{L} \cos \theta - \frac{g}{L} \sin \theta$$

で $\ddot{\theta} = 0$ すなわち

$$\frac{\alpha}{L} \cos \theta - \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

$$\alpha = g \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= g \tan \theta$$

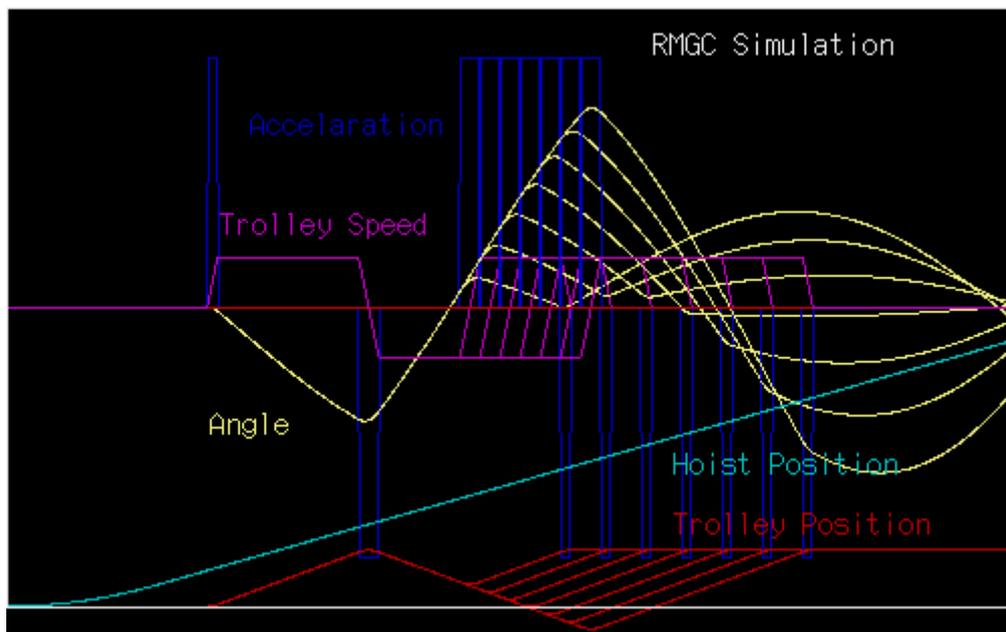
のとき、吊り荷には振れを発生させる力が生じない。

そこでトロリー（振り子の支点）を動かして目的の位置に達するとき

$$\alpha = g \tan \theta$$

となるようにコントロールしてやると振れは起きない。

このシミュレーション結果を図3 - 2に示す。



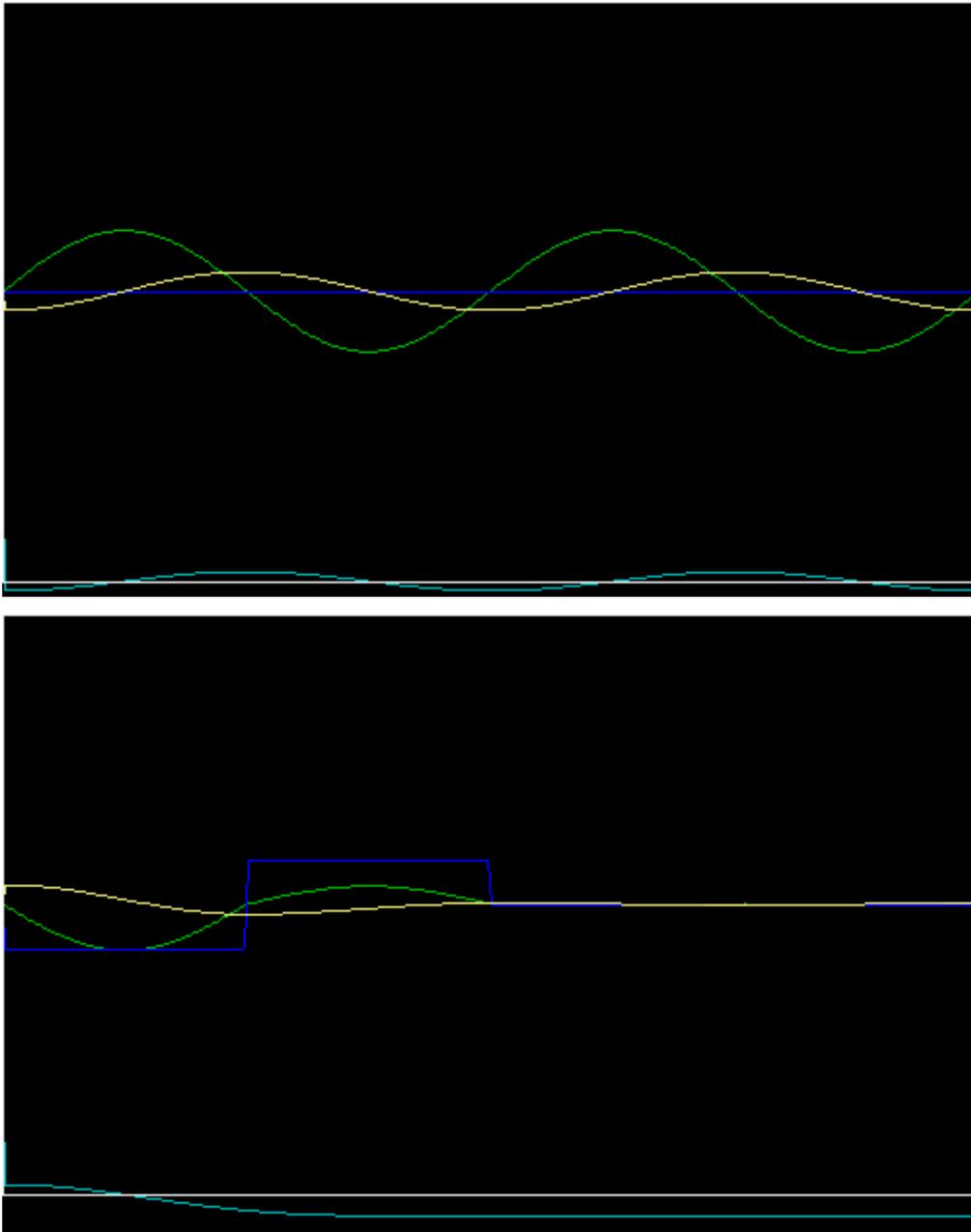


図 3 - 2

緑 $\dot{\theta}$ 角速度

3 - 3 フィードフォワード制御

以上二つの性質を利用してフィードフォワード制御をプログラムすると、従来のフィードバックに比べクレーン吊り荷の振れ制御を大幅に改善することができる。

手順は次の通り

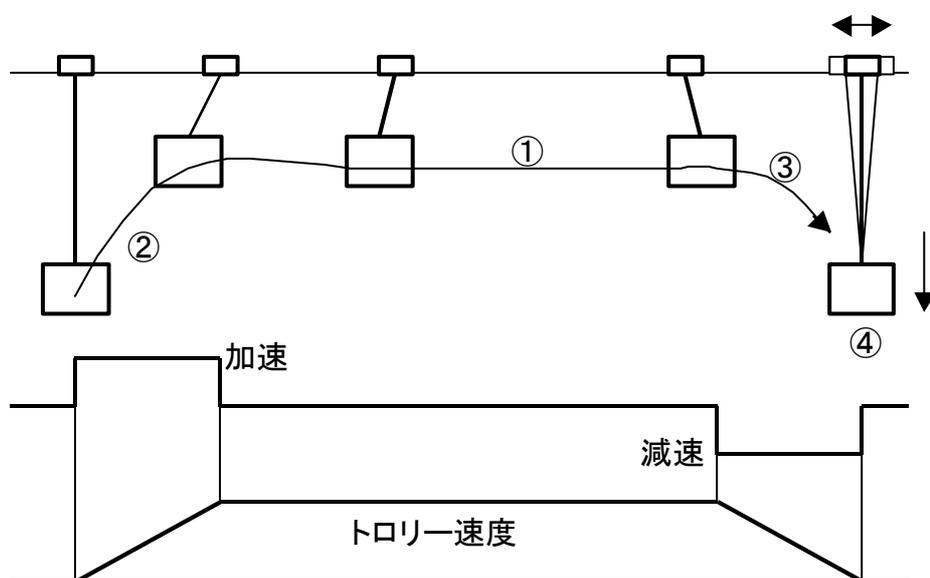
まず最短の吊り荷のパス（軌道）を予想する。

トロリースタート時、吊り荷固有のモードで加速し振れが出ないように操作する。

目的のキャニオンの上でトロリーを吊り荷固有のモードで減速し、振れを止める。

コリオリの力を見込んで吊り荷を落とすように降ろしていく。

風など予期せぬ外乱に備えて、多少のフィードバックによる修正を残す。



4 コンピュータシミュレーション

式 1 - 6 と 1 - 7 は 2 階の微分方程式なので、コンピュータで計算しやすいように一階連立微分方程式に変換する。

速度 $v = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$ と角速度 $\phi = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ を導入して、式 1 - 6 と 1 - 7 を次のように変換する。

$$\dot{v} = -\ddot{z} \sin \theta + r \dot{\theta}^2 + g \cos \theta - \frac{k}{m} r - \frac{1}{m} Q_r$$

$$\dot{r} = v$$

$$\dot{\phi} = -2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} + \frac{\ddot{z}}{r} \cos \theta - \frac{g}{r} \sin \theta - \frac{1}{mr} Q_\theta$$

$$\dot{\theta} = \phi$$

シミュレーションプログラムの中では、 v, r, ϕ, θ をそれぞれ $x[1], x[2], x[3], x[4]$ とした。

$$\dot{x}[1] = -\ddot{z} \sin x[4] + x[2] \dot{x}[3] + g \cos x[4] - \frac{k}{m} x[2] - \frac{1}{m} Q_r$$

$$\dot{x}[2] = x[1]$$

$$\dot{x}[3] = -2 \frac{x[1]}{x[2]} x[3] + \frac{\ddot{z}}{x[2]} \cos x[4] - \frac{g}{x[2]} \sin x[4] - \frac{1}{m x[2]} Q_\theta \quad 2 - 1$$

$$\dot{x}[4] = x[3]$$

まず、従来のフィードバック方式のシミュレーション結果を図 4 - 1 に示す。割り当てられたコンテナヤードの峡谷にコンテナクレーンを移動するシミュレーションの結果を表示した。図 4 - 2 のコンピュータグラフィックスが、フィードバックの代わりに最適のフィードフォワードでコントロールしたものである。図 4 - 3 はコンピュータアニメーションで表示したもので、図 4 - 3 の (1) から (5) でその過程を表示している。

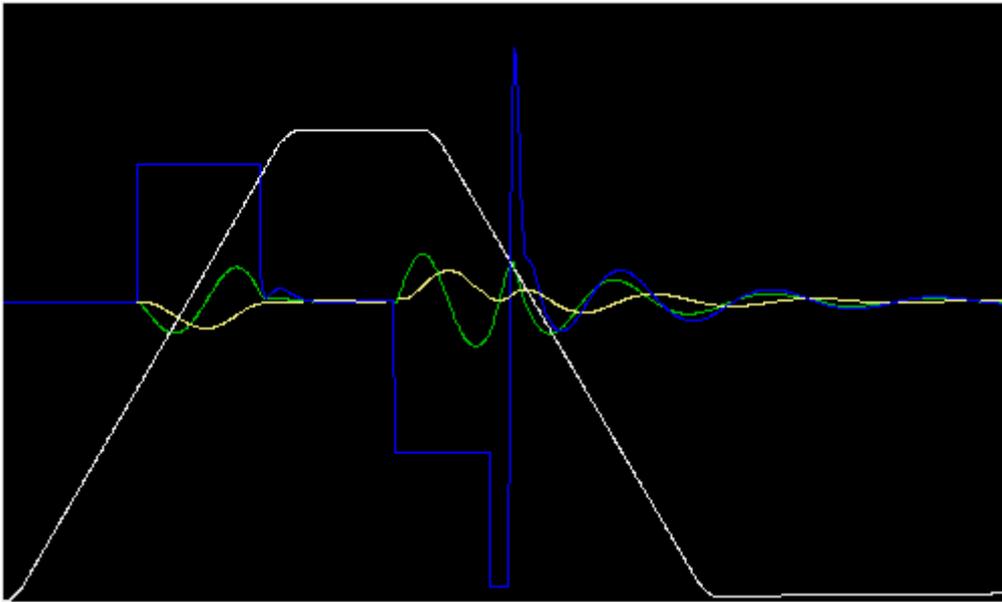


图 4 - 1

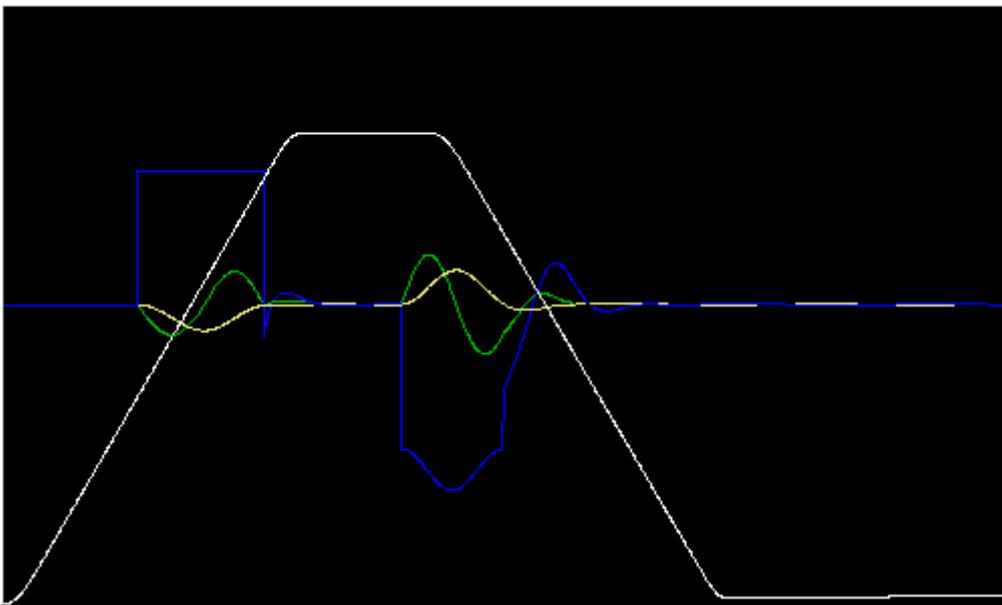


图 4 - 2

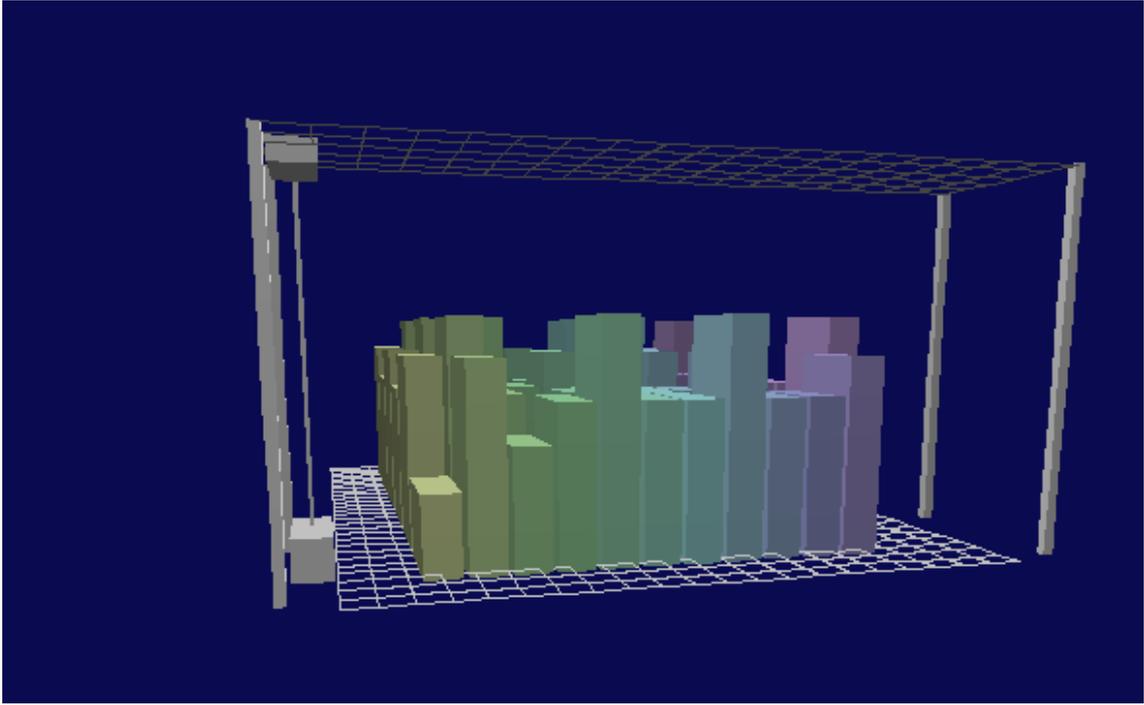


图 4 - 3 (1)

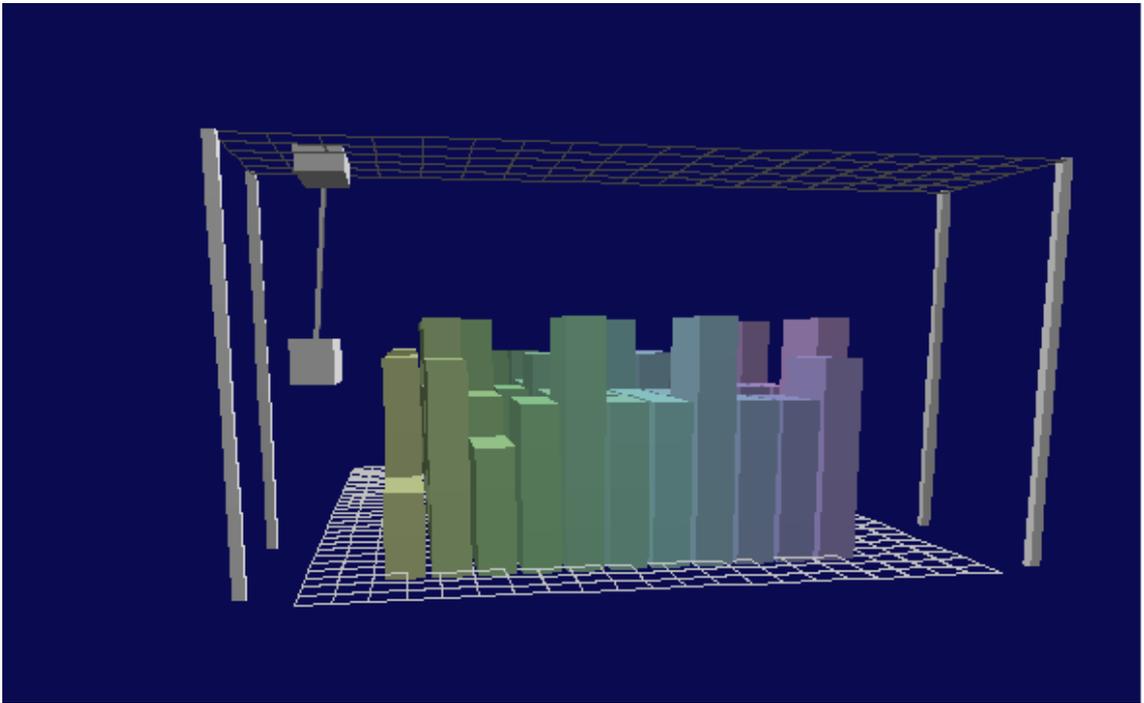


图 4 - 3 (2)

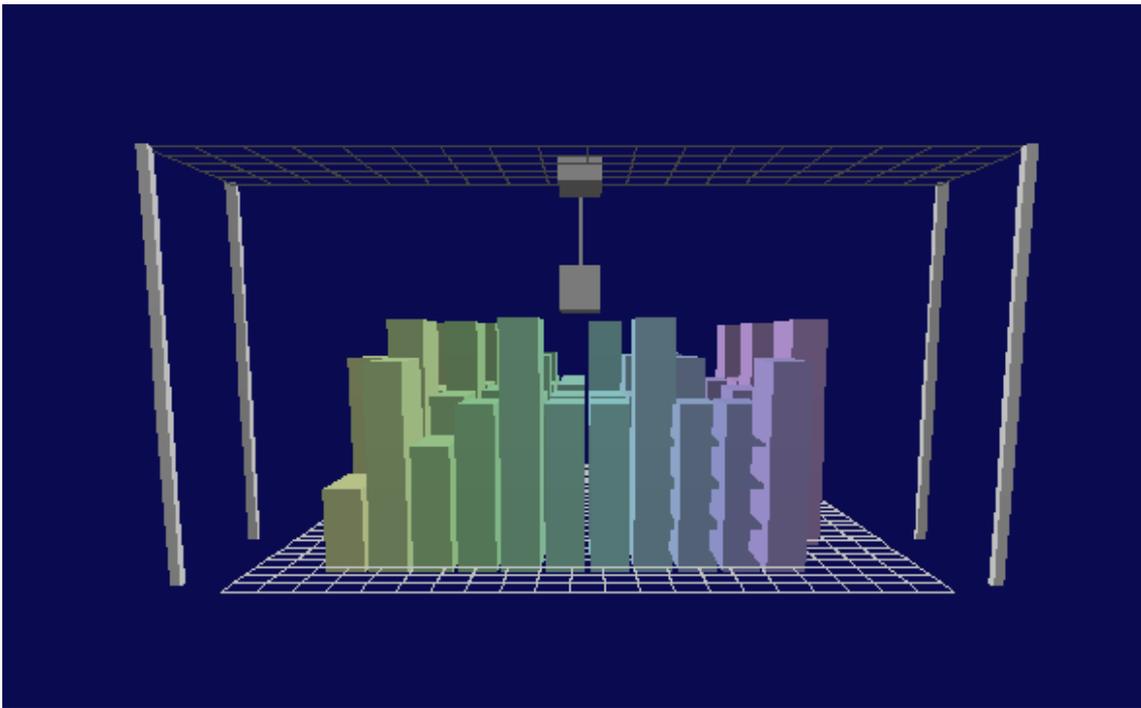


图 4 - 3 (3)

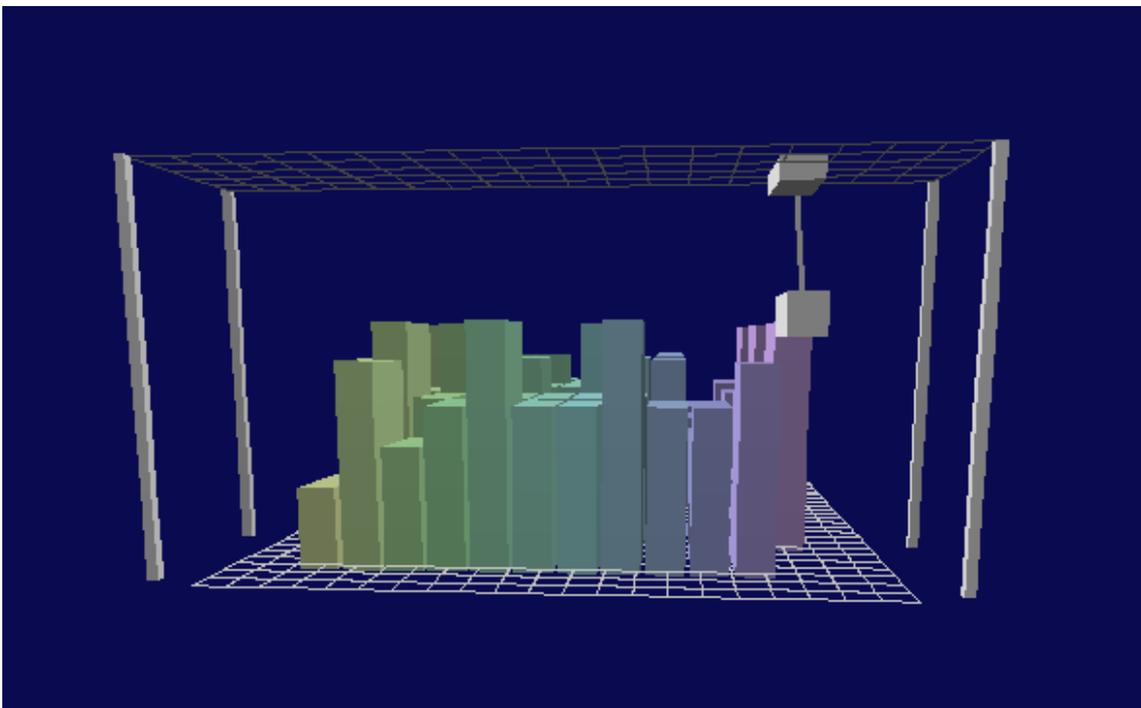


图 4 - 3 (4)

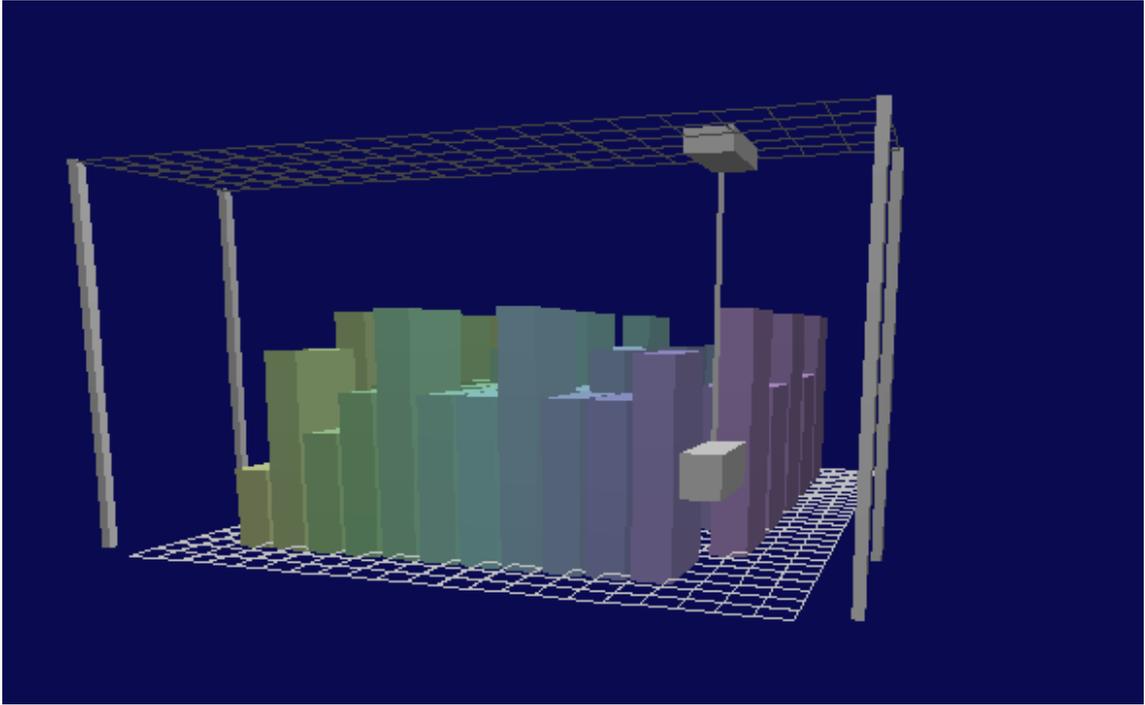


图 4 - 3 (5)

結言

本研究ではコンテナクレーン吊り荷の振れについてシミュレーションを行い、吊り荷の固有モード、コリオリの力を考慮したフィードフォワード制御が従来のフィードバック制御に比べ優れていることを示した。

謝辞

本研究を行うにあたり熱心なご指導をくださいました、磯村修一教授に深く感謝いたします。また、プログラム作成に協力していただいた、都築弘孝氏にも感謝します。

参考文献

<http://www9.ocn.ne.jp/~isomura/解析学第2編初期値問題> (微分方程式)

付録 A オイラー・ラグランジュの方程式

物体 i の状態を表す時間 t の関数としての一般座標

$$q_i (i=1,2,3,\dots,n)$$

を成分とする n 次元ベクトルを

$$q = q(t)$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

A-1

及びその時間 t に関する導関数を

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

A-2

とする。

$$\text{関数 } L = L(\dot{q}, q)$$

L は運動エネルギー $T(\dot{q})$ とポテンシャルエネルギー $U(q)$ の差、 $L = T - U$ である。
 \dot{q}, q の汎関数、すなわち時刻 $t = t_1$ から $t = t_2$ までの線積分

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}, q) dt$$

A-3

が定留値をとる条件を求める。

境界 $t = t_1$ と $t = t_2$ では

$$\delta q = 0$$

$$t_1 < t < t_2$$

では δq が任意

であるような変分 δ をとると J が定留値となる。

条件は

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\dot{q}, q) dt = 0$$

A-4

である。

$$L = L(\dot{q}, q)$$

をテーラー展開して

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q$$

さらに積の微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d \delta q}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q \end{aligned} \tag{A-5}$$

となる。

これを A-4 に代入して

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q \right\} dt \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q dt \end{aligned} \tag{A-6}$$

境界では $\delta q = 0$

したがって

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{A-7}$$

A-6, A-7 から

$$\delta J = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q dt = 0 \tag{A-8}$$

J が定留値をとることと、 $t_1 < t < t_2$ で

$$\delta q \neq 0$$

の条件から

オイラーラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{A-9}$$

が得られる。

いま、物体 i に外力 Q_i が働くとき

その仕事は

$$W_i = Q_i q_i$$

であり、そのポテンシャルは

$$\begin{aligned} U_i &= -W_i \\ &= -Q_i q_i \end{aligned} \quad \text{A-10}$$

となる。そこで改めてラグランジアン F を

$$\begin{aligned} F &= L - \sum_{i=1}^n U_i \\ &= L + \sum_{i=1}^n Q_i q_i \end{aligned} \quad \text{A-11}$$

と表すと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial F}{\partial q} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \left(\frac{\partial L}{\partial q} + \sum_{i=1}^n Q_i \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= \sum_{i=1}^n Q_i \end{aligned} \quad \text{A-12}$$

を得る。いま

$$L(\dot{q}, q) = L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n; q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$$

と成分で表すと、A-12 は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= Q_i \\ i &= 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad \text{A-13}$$

となる。