I 次の各問に答えよ。答えのみを解答用紙の所定欄に記すこと。

(1) 2016 の正の約数の個数を求めよ。

(2) 方程式 $|x-2| = 1 + |x+3|$ を解け。

(3) 方程式 $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$ の複素数解をすべて求めよ。

(4) 100 から 999 までの整数で，各桁の数が二つ以上同じものの個数を求めよ。

(5) $4^{\log_2 5}$ の値を求めよ。

(6) $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ の値を求めよ。

(7) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 4$ の極大値を求めよ。

(8) n を自然数とするとき，$\dfrac{2n^2 + 9n + 12}{n+2}$ の小数部分を求めよ。

(9) n を 0 以上の整数とするとき，${}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_n$ を求めよ。

(10) $y = f(x)$ 上の任意の点 $(a, f(a))$ から点 $(0, 1)$ までの距離と，点 $(a, f(a))$ から点 $(a, -1)$ までの距離とが等しいとき，$f(x)$ を求めよ。

(11) 連立不等式 $x^2 \leqq y$，$y \leqq 2x + 3$，$y \leqq -x + 6$ の表す領域の面積を求めよ。

(12) p, q, r, s, t は 0 または 1 とする。このとき

$$0.78 < \frac{p}{2} + \frac{q}{4} + \frac{r}{8} + \frac{s}{16} + \frac{t}{32} < 0.80$$

を満たすような (p, q, r, s, t) を 1 組求めよ。

II 関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = \{f(x)\}^2 - 1$$

で定義する。次の各問に答えよ。

(1) $g(x) = 0$ をみたす実数 x をすべて求めよ。

(2) $x > 1$, $f(x) = x$ をみたす実数 x を1つ求めよ。

(3) $x > 1$, $g(x) = x$ をみたす実数 x を1つ求めよ。

III 三角形 ABC の 3 つの角を A, B, C とし，向かい合う辺の長さを a, b, c とする。このとき，次の 3 つの命題 (P)(Q)(R) のうち，どの 2 つも互いに同値であることが知られている。その証明を読み，後の設問に答えよ。ただし，証明にあたっては，三角関数の加法定理は既知とする。

(P) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \quad \cdots$(i)

(Q) $\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B & \cdots\text{(ii)} \\ b = c\cos A + a\cos C & \cdots\text{(iii)} \\ c = a\cos B + b\cos A & \cdots\text{(iv)} \end{cases}$

(R) $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A & \cdots\text{(v)} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B & \cdots\text{(vi)} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C & \cdots\text{(vii)} \end{cases}$

[証明]　まず (P)$\Longrightarrow$(Q) を示す。与えられた式の値を k とすると

$$a = k\sin A,\ b = k\sin B,\ c = k\sin C$$

である。よって

$$\begin{aligned} b\cos C + c\cos B &= k\sin B\cos C + k\sin C\cos B \\ &= k\sin(B+C) \\ &= k\sin(\pi - A) \\ &= k\sin A \\ &= a \end{aligned}$$

である。$\overset{(あ)}{\text{よって (ii) が示された。}}$
同様に (iii), (iv) も示される。よって (P)$\Longrightarrow$(Q) が示された。

次に (Q)$\Longrightarrow$(R) を示す。(ii) $\times a$ + (iii) $\times b$ − (iv) $\times c$ をつくると

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 &= a(b\cos C + c\cos B) + b(c\cos A + a\cos C) \\ &\quad -c(a\cos B + b\cos A) \end{aligned}$$

であるが，(い)これは $2ab\cos C$ に等しい。よって (vii) 式が成り立つ。(v)，(vi) 式も同様である。よって (Q)$\Longrightarrow$(R) が示された。

次に (R)$\Longrightarrow$(P) を示す。(v) より

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1-\cos^2 A \\ &= 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \\ &= \frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}\end{aligned}$$

である。この式の分子は

(う)$(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$

と因数分解することができるので

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(2abc)^2}$$

が成り立つ。この右辺は a,b,c の対称式だから

(え)$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2}$$

が成り立つ。よって

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

が成り立つ。よって (R)$\Longrightarrow$(P) が示された。

以上により (P)$\Longrightarrow$(Q)，(Q)$\Longrightarrow$(R)，(R)$\Longrightarrow$(P) が成り立つことが分かったので，(P)(Q)(R) から任意の 2 つを選んだとき，(お)それらは互いに同値である。(証明終了)

[設問] (1) 下線部 (あ) と同様にして，(iii) が成り立つことを示せ。

(2) 下線部 (い) を確かめなさい。

(3) 下線部 (う) を確かめなさい。

(4) 下線部 (え) について，

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2}$$

が成り立っていることを確かめなさい。

(5) 下線部 (お) の理由を分かりやすく説明しなさい。

(6) 上の証明では {(ii) かつ (iii) かつ (iv)} ならば (vii) であることが示されたが，{(ii) かつ (iii) かつ (vii)} ならば (iv) であることを示せ。

(7) {(ii) かつ (iii) かつ (vii)} は (P)(Q)(R) のいずれとも同値である理由を分かりやすく説明しなさい。