平成 28 年度　経済・マネジメント学群ＡＯ入試　数学・解答例

$\boxed{\text{I}}$ (1) 36

(2) $x = -1$

(3) $x = 1, -1 \pm \sqrt{3}i$

(4) 252

(5) 25

(6) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(7) 23

(8) $\dfrac{2}{n+2}$

(9) 2^{2n}

(10) $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$

(11) $\dfrac{15}{2}$

(12) $(1, 1, 0, 0, 1)$

$\boxed{\text{II}}$ (1) $g(x)=0$ より $\{f(x)\}^2-1=0$, すなわち $f(x)=\pm1$ である。これを解くと $x^2-1=\pm1$, すなわち $x^2=0$ または 2 である。よって $x=0,\pm\sqrt{2}$.

(2) $f(x)=x$ より $x^2-1=x$, すなわち $x^2-x-1=0$ である。これを解くと $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ である。$x>1$ であることから $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(3) $f(x)=x$ のとき

$$g(x)=\{f(x)\}^2-1=x^2-1=x$$

である。よって $f(x)=x$ の解は $g(x)=x$ の解でもある。$x>1$ であることから $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は求める解の一つである。

(3) 【別解】$g(x)=x$ の解を直接的に求めることも可能である。$\{f(x)\}^2-1=x$ より $(x^2-1)^2-1=x$ である。右辺を左辺に移項した上で展開し因数分解すると $x(x+1)(x^2-x-1)=0$ となる。この解は $x=0,-1,\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ であるが, このうち $x>1$ を満たすものは $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\boxed{\text{III}}$ (1)

$$\begin{aligned} c\cos A+a\cos C &= k\sin C\cos A+k\sin A\cos C \\ &= k\sin(A+C) \\ &= k\sin(\pi-B) \\ &= k\sin B \\ &= b \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & a(b\cos C+c\cos B)+b(c\cos A+a\cos C)-c(a\cos B+b\cos A) \\ = {} & (ab+ab)\cos C+(bc-bc)\cos A+(ac-ac)\cos B \end{aligned}$$

$$= \quad 2ab\cos C$$

(3)

$$\begin{aligned} & (2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2 \\ = \ & (2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2) \\ = \ & \{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\} \\ = \ & (b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c) \end{aligned}$$

(4) $\dfrac{\sin^2 B}{b^2}$ を求めるには, 証明中の

$$\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2(abc)^2}$$

において,a と b とを入れ換えればよい。すると, 上式は

$$\frac{(b+a+c)(-b+a+c)(b-a+c)(b+a-c)}{2(bac)^2}$$

となるが, これは元の式に等しい。

(5) $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$, $\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{R}$, $\mathrm{R} \Longrightarrow \mathrm{P}$ であるから,

$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$,
$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{R}$,
$\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{R}$,
$\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{R} \Longrightarrow \mathrm{P}$,
$\mathrm{R} \Longrightarrow \mathrm{P}$,
$\mathrm{R} \Longrightarrow \mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$

はすべて成立する。すなわち P,Q,R の３つのうちどの２つを選んでも, それらは互いに同値である。

(6) (ii) かつ (iii) かつ (vii) のとき,$2ab\cos C = a^2+b^2-c^2$ である。一方

$$a^2+b^2-c^2 = a(b\cos C+c\cos B)+b(c\cos A+a\cos C)-c^2$$

である。よって

$$2ab\cos C = a(b\cos C+c\cos B)+b(c\cos A+a\cos C)-c^2$$

である。よって $c^2 = ac\cos B + bc\cos A$ だから (iv) が成り立つ。

(7)

$$
\begin{aligned}
\{\text{(ii) かつ (iii) かつ (vii)}\} &\iff \{\text{(ii) かつ (iii) かつ (iv)}\} \\
&\iff \text{Q} \\
&\iff \text{P} \\
&\iff \text{R}
\end{aligned}
$$

である。