I 次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) x の多項式 $P(x)$ を $(x+1)^2$ および $x-1$ で割ったときの余りは，それぞれ $3x+1$, -4 である。このとき，$P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2$ 上の点で，点 $(6,3)$ との距離が最も小さくなるようなものの x 座標を求めよ。

(3) x の方程式 $x^2-3x-2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$ の実数解をすべて求めよ。

(4) t が実数全体を動くとき，2 直線 $tx-y-2t=0$ と $x+2ty-2t=0$ の交点 (x,y) について，$x+y$ が取り得る値の範囲を求めよ。

(5) $x>0,\ y>0,\ x+2y=10$ のとき，$\log_{10}x+\log_{10}y$ の最大値を求めよ。ただし, $\log_{10}2=0.301$ とする。

(6) 1 辺の長さが 2 の正方形の周および内部を A とし，正方形の対角線の交点を中心として A を 45° 回転させたものを B とする。A と B の共通部分の面積を求めよ。

(7) 3 辺の長さが $5,6,7$ である三角形の内接円の半径を求めよ。

(8) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$ について，$\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{6}$, $\sin\alpha\cos\beta=-\dfrac{1}{6}$ とする。このとき，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(9) 次の連立不等式の表す領域の面積を求めよ。

$$x^2\leqq y,\quad y\leqq 2x+3,\quad y\leqq -x+6$$

(10) 2 つの円 $x^2+y^2\leqq 4$, $\left(x-\sqrt{6}\,\right)^2+\left(y-\sqrt{6}\,\right)^2\leqq 4$ の共通部分の面積を求めよ。

(11) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2+1}\,\right)$ を求めよ。

(12) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ を x について微分せよ。

II $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ の 8 つの数について，次の各問に答えよ。

(1) 上の 8 つの数から異なる 4 つの数をとって 4 けたの数をつくるとき，何通りの数ができるか。

(2) (1) のうち，4 の倍数は何通りできるか。

(3) 上の 8 つの数から異なる 2 つの数をとる組合せをすべて考え, それぞれの組合せについて 2 つの数の積をとる. このようにしてできる積の総和を求めよ。

III n を自然数とする。次の主張と証明を読み，後の設問に答えよ。

【主張 1】数 $1, 2, \ldots, 2n$ からどのように $n+1$ 個の数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ を選んでも，その中には互いに素な 2 つの数が存在する。

【主張 2】数 $1, 2, \ldots, 2n$ からどのように $n+1$ 個の数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ を選んでも，その中には一方がもう一方を割り切る 2 つの数が存在する。

【証明】まず主張 1 を証明する。$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ は (ア) $\underline{a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}}$ をみたしているとしてよい。このとき，これら $n+1$ 個の数の中には 1 だけ離れた 2 つの数が存在する。なぜなら，どの 2 つも 2 以上離れているとすると

$$a_1 \geqq 1, \quad a_2 \geqq a_1 + 2 \geqq 3, \quad a_3 \geqq a_2 + 2 \geqq 5, \quad \ldots, \quad a_{n+1} \geqq 2n+1$$

となり，(イ) 矛盾が生じる からである。

a_k $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ の中から 1 だけ離れている 2 つの数を選び，それらを a と $a+1$ とする。このとき，(ウ) これらは互いに素 である。よって主張 1 が証明された。

次に主張 2 を証明する。$k = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して，a_k を割り切る最大の 2 のベキを 2^{e_k} とする。つまり 2^{e_k} は a_k を割り切るが，2^{e_k+1} は a_k を割り切らない。すると各 k に対して $a_k = 2^{e_k} b_k$（b_k は自然数）とかける。さらに (エ) b_k は奇数 である。

1 以上 $2n-1$ 以下の奇数は n 個しかないので，(オ) $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ の中には等しいものがある。それらを b_k と b_l $(1 \leqq k < l \leqq n+1)$ とし，$b_k = b_l = m$ とおく。このとき $a_k = 2^{e_k} m$，$a_l = 2^{e_l} m$ であり，$e_k \neq e_l$ である。したがって (カ) a_k, a_l のどちらか一方はもう一方を割り切る。よって主張 2 も証明された。

[設問]

(1) 下線部（ア）の理由を説明せよ。

(2) 下線部（イ）の理由を説明せよ。

(3) 下線部（ウ）の理由を説明せよ。ただし，一般に自然数 m, n が互いに素であるとは，自然数 d, m', n' を用いて $m = dm'$, $n = dn'$ とかいたときに必ず $d = 1$ となることをいう。

(4) 下線部（エ）の理由を説明せよ。

(5) 下線部（オ）の理由を説明せよ。

(6) 下線部（カ）の理由を説明せよ。

(7) $n \geqq 2$ のとき，主張 1 において $n+1$ 個の数を選ぶかわりに n 個の数を選ぶこととすると，結論は成り立たなくなる。$n = 3$ の場合と一般の n の場合について，反例となる n 個の選び方をそれぞれ示しなさい。

(8) $n \geqq 2$ のとき，主張 2 において $n+1$ 個の数を選ぶかわりに n 個の数を選ぶこととすると，結論は成り立たなくなる。$n = 3$ の場合と一般の n の場合について，反例となる n 個の選び方をそれぞれ示しなさい。