解答

$\boxed{\textbf{I}}$ （実際の解答では最後の答のみを記入する.）

(1) 求める余りを $R(x)$ とすると, これは 2 次以下の多項式であり

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)Q(x) + R(x) \quad (Q(x) \text{ は } x \text{ の多項式})$$

とかける. このとき, $R(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りは条件より $3x+1$ であるから

$$R(x) = a(x+1)^2 + 3x + 1 \quad (a \text{ は定数})$$

とかける. よって

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)Q(x) + a(x+1)^2 + 3x + 1.$$

また, 剰余定理より $P(1) = -4$ であるから $4a + 4 = -4$. よって $a = -2$ であり, $R(x) = -2(x+1)^2 + 3x + 1 = -2x^2 - x - 1$.

(2) 放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$ と点 $A(6, 3)$ との距離の 2 乗を $f(t)$ とすると

$$f(t) = (t-6)^2 + (t^2-3)^2 = t^4 - 5t^2 - 12t + 45.$$

$AP \geqq 0$ だから, $f(t) = AP^2$ が最小となるとき AP も最小となる.

$$f'(t) = 4t^3 - 10t - 12 = 2(t-2)(2t^2+4t+3)$$

であり, $2t^2 + 4t + 3 = 2(t+1)^2 + 1 > 0$ であるから, $f'(t) = 0$ とすると $t = 2$.
よって, $f(t)$ の増減表は次のようになる.

t	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって, $f(t)$ は $t = 2$ のとき最小となる. よって求める x 座標は 2.

(3) $t = x + \dfrac{1}{x}$ とおくと

$$t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

なので, 与えられた方程式は

$$(t^2 - 2) - 3t - 2 = 0$$

つまり $t^2-3t-4=0$ となる. これを解いて $t=-1,4$

$t=-1$ のとき $x+\dfrac{1}{x}=-1$ より $x^2+x+1=0$. この方程式は実数解をもたない.

$t=4$ のとき, $x+\dfrac{1}{x}=4$ より $x^2-4x+1=0$. これを解いて $x=2\pm\sqrt{3}$.

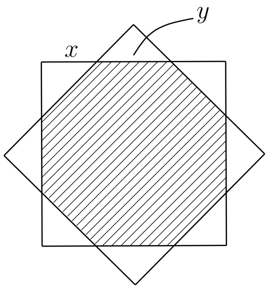
(4) $tx-y-2t=0$ より $y=t(x-2)$. これを $x+2ty-2t=0$ に代入して $x+2t^2(x-2)-2t=0$. よって $(2t^2+1)x=2t(2t+1)$ となり, $2t^2+1>0$ であるから $x=\dfrac{2t(2t+1)}{2t^2+1}$. このとき $y=\dfrac{2t(t-1)}{2t^2+1}$. したがって $x+y=\dfrac{6t^2}{2t^2+1}=3-\dfrac{3}{2t^2+1}$. t が実数全体を動くとき, $2t^2+1$ の取り得る値の範囲は $2t^2+1\geqq 1$ であるから, $x+y$ の取り得る値の範囲は $0\leqq x+y<3$.

(5) $x>0$, $y>0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係より $2\sqrt{2xy}\leqq x+2y=10$. よって $xy\leqq\dfrac{25}{2}$. したがって

$$\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy\leqq\log_{10}\frac{25}{2}=2-2\log_{10}2=2-2\cdot 0.301=1.398.$$

等号は $x=2y=5$, つまり $x=5$, $y=\dfrac{5}{2}$ のとき成り立つ. よって, 求める最大値は 1.398.

(6) A,B の図をかき, 下のように x, y をとる.



このとき $y=\sqrt{2}x$ であるから $x+\sqrt{2}x+x=2$. よって $x=\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$. したがって, 求める面積を S とすると

$$S=4-4\cdot\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})^2=8(\sqrt{2}-1).$$

(7) 求める内接円の半径を r とし, 三角形の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}(5+6+7)r=9r$$

が成り立つ. 一方, ヘロンの公式より

$$S = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$$

である（これを知らなくても, 三角比を使って S は求まる）. よって $9r = 6\sqrt{6}$ であるから $r = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

(8) 条件より, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ は 2 次方程式 $t^2 - \dfrac{1}{6}t - \dfrac{1}{6} = 0$ の 2 つの実数解である. これを解くと $t = \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}$ であり, 条件より $\sin\alpha > 0$, $\cos\beta < 0$ だから $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{3}$. また $\cos\alpha < 0$, $\sin\beta < 0$ であるから

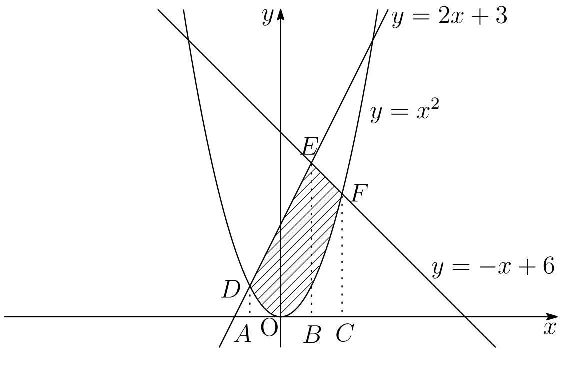
$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\beta = -\sqrt{1 - \cos^2\beta} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

したがって

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}.$$

(9) $x^2 = 2x + 3$ とすると $x = -1, 3$ である. $2x + 3 = -x + 6$ とすると $x = 1$ である. また, $x^2 = -x + 6$ とすると $x = -3, 2$ である. したがって, 図のように点 A, B, C, D, E, F をとると

$$A(-1, 0), \quad B(1, 0), \quad C(2, 0), \quad D(-1, 1), \quad E(1, 5), \quad F(2, 4).$$



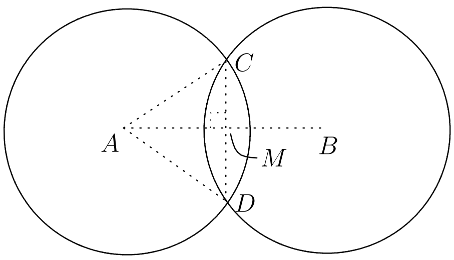
よって

$$(\text{台形 } ABED \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 5) \cdot 2 = 6,$$
$$(\text{台形 } BCFE \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \cdot (5 + 4) \cdot 1 = \frac{9}{2}.$$

したがって, 求める面積を S とすると

$$S = 6 + \frac{9}{2} - \int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{21}{2} - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{21}{2} - \frac{1}{3}\cdot\{8-(-1)\} = \frac{15}{2}.$$

(10) 2 つの円の中心 $A(0,0)$, $B(\sqrt{6},\sqrt{6})$ の中点を M とすると, $AB = 2\sqrt{6}$ より $AM = \sqrt{6}$.



したがって図の $\triangle ACM$ において $AC = 2$, $AM = \sqrt{3}$, $\angle AMC = 90^\circ$ であるから $\angle CAM = 30^\circ$. よって $\triangle ACD$ において $AC = AD = 2$, $\angle CAD = 60^\circ$ であるから, $\triangle ACD$ は正三角形である. よって

$$(\text{扇形 } ACD \text{ の面積}) = \pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi,$$
$$\triangle ACD = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

したがって, 求める面積を S とすると

$$S = 2\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right) = \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

(11) $t = -x$ とおくと, $x \to -\infty$ のとき $t \to \infty$ であるから

$$(\text{与式}) = \lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-5t+1} - \sqrt{t^2+1}) = \lim_{t\to\infty}\frac{-5t}{\sqrt{t^2-5t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{-5}{\sqrt{1-\frac{5}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\frac{5}{2}.$$

(12) 商の微分法を用いて

$$y' = \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}.$$

II

(1) 千の位の選び方は（0 を除くので）7 通り, 百, 十, 一の位の選び方はそれぞれ 7, 6, 5 通りである. よって, できる 4 けたの数の総数は $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470$ 通りである.

(2) 4 けたの数 n が 4 の倍数となるための必要十分条件は, n の下 2 けたが 4 の倍数となることである. (1) で得られた数の下 2 けたのうち, 4 の倍数となるのは

04,　12,　16,　20,　24,　32,　36,　40,　52,　56,　60,　64,　72,　76

である. このうち, 下 2 けたが 0 を含む, つまり 04, 20, 40, 60 になるような 4 けたの数の総数は

$$4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$$

である. また, 下 2 けたが 0 を含まない, つまり 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64, 72, 76 になるような 4 けたの数の総数は

$$10 \cdot 5 \cdot 5 = 250$$

である. よって, (1) のうち 4 の倍数は $120 + 250 = 370$ 通りである.

(3) 求める総和を S とすると

$$(0 + 1 + 2 + \cdots + 7)^2 = 0^2 + 1^2 + \cdots + 7^2 + 2S$$

が成り立つから, $2S = 28^2 - 140$. よって $S = 322$.

III

(1) 必要なら, 選んだ $n+1$ 個の数を小さいものから順に $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ と取りなおせばよいから.

(2) 選び方から $a_{n+1} \leqq 2n$ であるから.

(3) 自然数 d, m, n を用いて $a = dm,\ a+1 = dn$ とかけたとする. このとき $1 = (a+1) - a = dn - dm = d(n-m)$ であり, $d, n-m$ は整数だから d は 1 の約数である. d は自然数だから $d = 1$ である. よって a と $a+1$ は互いに素である.

(4) b_k が偶数であると仮定すると $b_k = 2b$（b は整数）とかける. このとき $a_k = 2^{e_k} b_k = 2^{e_k} \cdot 2b = 2^{e_k+1} b$ であるから a_k は 2^{e_k+1} で割り切れる. これは e_k の取り方に反する. 以上より b_k は奇数である.

(5) $b_1, \ldots, b_{n+1}$ はすべて奇数なので, これらがすべて相異なるとすると, 1 以上 $2n-1$ 以下の奇数が $n+1$ 個以上あることになり矛盾が生じるから.

(6) $e_k < e_l$ のとき, $2^{e_k} \mid 2^{e_l}$ より $a_k = 2^{e_k} m$ は $a_l = 2^{e_l} m$ を割り切る. $e_k > e_l$ のとき, 同様にして a_l が a_k を割り切ることがわかる.

(7) $n = 3$ のとき $2, 4, 6$. 一般の $n \geqq 2$ に対して $2, 4, 6, \ldots, 2n$. このように選んだ数はすべて偶数なので, この中には互いに素な 2 つの数はない.

(8) $n = 3$ のとき $4, 5, 6$. 一般の $n \geqq 2$ に対して $n+1, n+2, \ldots, 2n$. このように選ぶと, 最大の数は最小の数の 2 倍より小さいので, どの 2 つをとっても片方がもう片方を割り切ることはない.