

数 学 $\frac{1}{6}$

I 次の各問に答えよ。なお、解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

- (1) 4人でじゃんけんをしたとき、あいこになる確率を求めよ。ただし、あいこは誰も勝たないこととする。
- (2) $4^x + 4^{-x} = 7$ のとき $8^x - 8^{-x}$ の値を求めよ。
- (3) x の方程式 $\sin 5x + \sin x = 0$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ を解け。
- (4) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$ を求めよ。
- (5) 平行四辺形 ABCD があり、辺 CD 上に点 E を $CE : ED = 1 : 2$ を満たすようにとり、辺 AD 上に点 F を $AF = FD$ を満たすようにとる。AE, BF の交点を P, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ として、 \overrightarrow{AP} を \vec{b} , \vec{d} を用いて表せ。
- (6) i を虚数単位とする。 $(\sqrt{3} - i)^8$ を求めよ。
- (7) 関数 $f(x)$ は導関数 $f'(x)$ が存在して $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ であるとする。
合成関数 $f\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ の導関数を求めよ。
- (8) $\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$ の値を求めよ。

数 学 $\frac{2}{6}$

〔メモ欄〕

数 学 $\frac{3}{6}$

Ⅱ t を正の実数とし、 xy 平面上に 2 点 $A(0, 1)$, $B(t, 0)$ をとる。次の各問に答えよ。

- (1) 直線 AB の方程式を求めよ。
- (2) 原点を中心とし、直線 AB に接する円を C_t とする。円 C_t と直線 AB の接点 P の座標を求めよ。
- (3) (2) の円 C_t の方程式を求めよ。
- (4) t が $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$ の範囲を動くとき、(2) で求めた接点 P が描く曲線の長さを求めよ。
- (5) t が $t > 0$ の範囲を動くとき、(2) で求めた接点 P の軌跡を求めよ。

数 学 $\frac{4}{6}$

[メモ欄]

Ⅲ 曲線 $C_n : y = \log \frac{x}{n^2}$ に原点から引いた接線を ℓ_n とし、 C_n と ℓ_n の接点を A_n とする。次の各問に答えよ。ただし、 n は自然数とする。

(1) ℓ_n の方程式と A_n の座標を求めよ。

(2) ℓ_n , C_n および x 軸で囲まれる図形の面積 S_n を求めよ。

(3) (2) の S_n について $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n}$ が $\frac{4}{e-2}$ を超えないことを証明せよ。

数 学 $\frac{6}{6}$

[メモ欄]