

数 学 $\frac{1}{6}$

I 次の各問に答えよ。なお、解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

- (1) $0 < y < x$, $2 \log_5(x - y) = \log_5 x + \log_5 y$ のとき, $\frac{x}{y}$ の値を求めよ。
- (2) 平面上に 3 点 O, A, B があり, $|\overrightarrow{OA}| = 2$, $|\overrightarrow{OB}| = 3$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1$ とする。 $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。
- (3) 100 から 999 までの整数のうちで, 各位の数字が 2 つ以上同じである整数の個数を求めよ。ただし, 各位の数字が 2 つ以上同じである整数とは 383 や 777 のようなもののことである。
- (4) 2 乗して $3 - 4i$ となる複素数 $x + yi$ (x, y は実数) をすべて求めよ。ただし, i は虚数単位とする。
- (5) $2^{2017} + 3^{2017} + 5^{2017} + 7^{2017}$ の 1 の位の数をも求めよ。
- (6) 曲線 $y = (x^2 - 7)e^x$ の変曲点を求めよ。ただし, e は自然対数の底である。
- (7) 複素数 $z = \cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi$ に対して $z + z^2 + z^3 + z^4$ の値を求めよ。ただし, i は虚数単位とする。
- (8) 関数 $f(x) = \int_{-x}^x \frac{t^2}{1 + e^t} dt$ を x の式で表せ。

数 学 $\frac{2}{6}$

〔メモ欄〕

Ⅱ 正四面体 ABCD がある。動点 P は初め頂点 A にあり、1 秒ごとに隣り合う 3 つの頂点のうちの 1 つに等しい確率で移動するものとする。自然数 n に対して、 n 秒後に点 P が頂点 A, B, C, D にある確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n として、次の各問に答えよ。

- (1) p_1, q_1, r_1, s_1 の値を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 p_n を $q_{n-1}, r_{n-1}, s_{n-1}$ を用いた式で表せ。さらに、 p_n を n の式で表せ。
- (3) q_n, r_n, s_n をそれぞれ n の式で表せ。
- (4) 不等式 $|p_n - q_n| < 10^{-6}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。
ただし、 $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ であることを用いてよい。

数 学 $\frac{4}{6}$

〔メモ欄〕

Ⅲ 関数 $f(x) = x \sin x$ について次の各問に答えよ。

- (1) 導関数の定義に従って, $f(x) = x \sin x$ の導関数を求めよ。なお,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \text{ が成り立つことを用いてよい。}$$

- (2) 曲線 $C: y = x \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 上の点で, $0 < x < \pi$ の範囲にある点を P とする。点 P で引いた接線 ℓ が原点を通るような点 P の座標を求めよ。

- (3) (2) の曲線 C と接線 ℓ で囲まれた部分を D とする。 D の面積 S を求めよ。

数 学 $\frac{6}{6}$

〔メモ欄〕