

## 数 学 $\frac{1}{6}$

I 次の各問に答えよ。なお、解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1)  $0 < y < x$ ,  $2 \log_5(x - y) = \log_5 x + \log_5 y$  のとき,  $\frac{x}{y}$  の値を求めよ。

(2) 平面上に 3 点  $O, A, B$  があり,  $|\overrightarrow{OA}| = 2$ ,  $|\overrightarrow{OB}| = 3$ ,  
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1$  とする。  $|\overrightarrow{AB}|$  を求めよ。

(3) 100 から 999 までの整数のうちで, 各位の数字が 2 つ以上同じである整数の個数を求めよ。ただし, 各位の数字が 2 つ以上同じである整数とは 383 や 777 のようなもののことである。

(4)  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき, 次の方程式を解け。

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = -1$$

(5) 2 乗して  $3 - 4i$  となる複素数  $x + yi$  ( $x, y$  は実数) をすべて求めよ。ただし,  $i$  は虚数単位とする。

(6)  $xy - 2x + 3y = 0$  を満たす整数  $x, y$  の組  $(x, y)$  はいくつあるか。

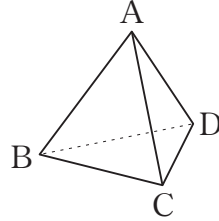
(7)  $2^{2017} + 3^{2017} + 5^{2017} + 7^{2017}$  の 1 の位の数を求めよ。

(8)  $x$  を超える最小の整数を  $\langle x \rangle$  で表す。例えば,  $\langle 3.14 \rangle = 4$  である。このとき, 等式  $2x = \langle x \rangle$  を満たす  $x$  の値を求めよ。

数 学  $\frac{2}{6}$

[メモ欄]

II 正四面体 ABCD がある。時刻  $t=0$  において点 A にある動点 P は 1 秒ごとに隣り合う 3 つの頂点のうちの 1 つに等しい確率で移動するものとする。自然数  $n$  に対して、時刻  $t=n$  において点 P が点 A, B, C, D にある確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n, s_n$  として次の各問に答えよ。



- (1) 時刻  $t=1$  において点 P が点 A, B, C, D にある確率  $p_1, q_1, r_1, s_1$  をそれぞれ求めよ。
- (2) 時刻  $t=n (n \geq 2)$  において点 P が点 A にあるとする。時刻  $t=n-1$  において点 P がいた可能性がある点をすべて求めよ。
- (3)  $n \geq 2$  のとき、 $p_n$  を  $q_{n-1}, r_{n-1}, s_{n-1}$  を用いて表せ。
- (4)  $n \geq 2$  のとき、 $p_{n-1} + q_{n-1} + r_{n-1} + s_{n-1}$  の値を答えた上で、 $p_n$  を  $p_{n-1}$  で表せ。
- (5)  $p_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (6)  $q_n = r_n = s_n$  であることを用いて、 $q_n, r_n, s_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (7)  $|p_n - q_n| < 10^{-6}$  を満たす最小の自然数  $n$  を求めよ。ただし、 $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$  であることを用いてよい。

数 学  $\frac{4}{6}$

[メモ欄]

数 学  $\frac{5}{6}$

Ⅲ 2つの放物線  $C_1: y = \frac{1}{4}x^2$ ,  $C_2: y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$  に対し, 次の各問に答えよ。

- (1)  $C_1$  上の点  $(a, \frac{1}{4}a^2)$  における接線の方程式を求めよ。
- (2) 点  $(-\frac{3}{2}, -1)$  を通る  $C_1$  の接線の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた  $C_1$  の接線のうち, 傾きが正であるものを  $\ell$  とする。  
 $\ell$  と  $C_2$  の共有点の座標を求めよ。
- (4) (3) の直線  $\ell$  と  $C_1, C_2$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

数 学  $\frac{6}{6}$

〔メモ欄〕