

数 学 $\frac{1}{6}$

I 次の各問に答えよ。なお、解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。
ただし、 e は自然対数の底である。

(1) 放物線 $y = x^2 - 2ax + 4a - 1$ の頂点の y 座標が 2 以上 3 以下になるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(2, 4)$ を頂点とする三角形 OAB の内接円の半径を求めよ。

(3) 正の整数 x は 4 進法で $3a3_{(4)}$, 5 進法で $2a0_{(5)}$ と表される。このとき x を 10 進法で表せ。ただし、 a は 0 以上 3 以下の整数とする。

(4) $\log_2 7$, $\log_4 25$, $\log_8 27$ の大小を不等号を用いて表せ。

(5) 和 $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ を求めよ。

(6) 平面ベクトル $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (-1, 2)$ のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

(7) 極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(e+h) - 1}{h}$ を求めよ。

(8) 自然数 n に対し、定積分 $\int_1^e x^n \log x \, dx$ を求めよ。

数 学 $\frac{2}{6}$

〔メモ欄〕

II n を正の整数とし、1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる方法の総数を a_n とする。ただし、箱の区別はつかないものとする。また、1 つもボールが入らない箱があってもよいものとする。例えば、 $a_1=1$ 、 $a_2=2$ である。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) a_3 を求めよ。
- (2) a_4 を求めよ。
- (3) n を 2 以上の整数とする。1 から $n-1$ まで異なる番号のついた $n-1$ 個のボールが 3 つの箱に分けて入っているときは、次の 3 つの状態がある。
 - (i) ボールが入っていない箱が 1 つもない状態
 - (ii) ボールが入っていない箱が 1 つだけの状態
 - (iii) ボールが入っていない箱が 2 つある状態
 これらの 3 つの状態について、番号 n のボール 1 個を加えて入れる方法は何通りあるか。(i), (ii), (iii) のそれぞれについて答えよ (答のみでよい)。
- (4) $n \geq 2$ のとき、 a_{n-1} を用いた式で a_n を表せ。
- (5) a_n を n の式で表せ。

数 学 $\frac{4}{6}$

〔メモ欄〕

数 学 $\frac{5}{6}$

Ⅲ 関数 $f(x) = -(x-1)^4 + 2(x-1)^3$ に対し、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形を D とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減とグラフの凹凸を調べて表にまとめよ。また、変曲点をもつ場合はその座標を求めよ。
- (2) 図形 D の面積を求めよ。
- (3) 1 より大きい定数 a に対し、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線を考える。これらの接線のうちで、その傾きが最も大きいものを ℓ で表す。直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (4) 図形 D のうちで、(3)の直線 ℓ よりも上側にある部分の面積を求めよ。

数 学 $\frac{6}{6}$

〔メモ欄〕