

令和2年度 情報学群AO入試 B区分

数 学 ② $\frac{1}{7}$

以下の問1~5のすべてに解答しなさい。問3~5は解答の過程も記述しなさい。

必要であれば、2の累乗と3の累乗の値は14ページの表3から求めてもよい。

2人でじゃんけんをして、勝った方が自分の出した手によって決まった数だけ階段の段を登るゲームをする。負けた方は階段を登ることができず、あいこのときはどちらも階段を登ることができない。表1は自分と相手の手によって、自分が何段登れるかをまとめた表である。

表1: 自分が登る段の数

		相手の手		
		グー	チョキ	パー
自 分 の 手	グー	0	3	0
	チョキ	0	0	6
	パー	6	0	0

このゲームで何回かじゃんけんをしたときに、自分が出した手を並べたものを「手譜」と呼ぶことにしよう。手譜には自分の手しか記録されず、勝敗も記録されない。例えば、4回じゃんけんをして表2のようにゲームが進んだとしよう。このとき、自分の手譜はじゃんけん4回分の「チョキ, グー, グー, パー」である。

表2: ゲームの進行の例

回	自分の手	相手の手	自分の勝敗	自分の登る段	現在の位置
1	チョキ	パー	勝ち	6	6段目
2	グー	グー	あいこ	0	6段目
3	グー	チョキ	勝ち	3	9段目
4	パー	チョキ	負け	0	9段目

このゲームで、次の各問の条件を満たす手譜が何通りあるかを考える。

令和2年度 情報学群AO入試 B区分

数 学 ② $\frac{2}{7}$

問1. このゲームで何回かじゃんけんをして、自分が全て勝ったとする。その結果、15段目にいるような手譜が何通りあるかを求めたい。ただし、じゃんけんの回数は何回でもよい。ある手譜で自分が全て勝ったとき何段登るかを求めるのに、相手の手を考える必要はない。例えば、手譜がじゃんけん3回分の「チョキ、グー、パー」であれば、自分が全て勝ったとき15段目にいる。

空欄 ~ にあてはまる数を答えなさい。

仮に「グー」を出し続けて勝ち続けたとする。そのとき、回勝てば15段目にいる。したがって、「グー」だけを並べたじゃんけん 回分の手譜は、全て勝ったとき15段目にいる手譜である。

「チョキ」か「パー」で勝てば「グー」で勝ったときの2倍の段登る。したがって、「グー」で2回勝つ代わりに「チョキ」か「パー」で1回勝てば同じ段登る。このことから、

- a. 「グー」が3回と、「チョキ」か「パー」のどちらかが1回現れるじゃんけん4回分の手譜
- b. 「グー」が1回と、「チョキ」と「パー」が合わせて2回現れるじゃんけん3回分の手譜

も全て勝ったとき15段目にいることが分かる。これら以外に、全て勝ったとき15段目にいる手譜は存在しない。a. と b. の条件を満たす手譜が、それぞれ何通りあるかを考える。

a. の条件を満たす手譜 「グー」が3回と「チョキ」が1回現れるじゃんけん4回分の手譜には、例えば「グー、チョキ、グー、グー」がある。これを含めて、「グー」が3回と「チョキ」が1回現れるじゃんけん4回分の手譜は 通りある。これらの手譜の「チョキ」を「パー」と置き換えた手譜も a. の条件を満たすので、a. の条件を満たす手譜は全部で 通りある。

b. の条件を満たす手譜 「グー」が1回と「チョキ」が2回現れるじゃんけん3回分の手譜は 通りある。これらの手譜の「チョキ」2回分のうちどちらか、または両方を「パー」と置き換えた手譜も b. の条件を満たすので、b. の条件を満たす手譜は の 倍の数だけ存在する。

全て「グー」の手譜と、a. の条件または b. の条件を満たす手譜を全て合わせると、全て勝ったとき15段目にいる手譜は全部で21通りある。

令和2年度 情報学群AO入試 B区分

数 学 ② $\frac{3}{7}$

問2. 全て勝ったとき3段目にいる手譜は、「グー」が一つだけのじゃんけん1回分の手譜の1通りである。全て勝ったとき6段目にいる手譜と9段目にいる手譜がそれぞれいくつあるかも考える。空欄 ・ に入れるのに最も適当なものを下の解答群のうちから一つずつ選びなさい。また、空欄 ～ に当てはまる数を答えなさい。

全て勝ったとき6段目にいる手譜 次の条件を満たす手譜だけが、全て勝ったとき6段目にいる。

- a. 全て勝ったとき3段目にいる手譜の後に を追加した手譜
- b. が一つだけのじゃんけん1回分の手譜

条件 a. を満たす手譜は1通り、条件 b. を満たす手譜は2通りなので、合計3通りある。

全て勝ったとき9段目にいる手譜 次の条件を満たす手譜だけが、全て勝ったとき9段目にいる。

- a. 全て勝ったとき6段目にいる手譜の後に を追加した手譜
- b. 全て勝ったとき 段目にいる手譜の後に を追加した手譜

全て勝ったとき6段目にいる手譜は3通りなので、条件 a. を満たす手譜は3通りある。全て勝ったとき 段目にいる手譜は1通りなので、条件 b. を満たす手譜は 通りある。したがって、全て勝ったとき9段目にいる手譜は 通りある。

・ の解答群

- ① 「グー」 ② 「チョキ」 ③ 「パー」 ④ 「チョキ」か「パー」

令和2年度 情報学群AO入試 B区分

数 学 ② $\frac{4}{7}$

問 3. 全て勝ったとき 30 段目にいる手譜が何通りあるか答えなさい。

令和2年度 情報学群AO入試 B区分

数 学 ② $\frac{5}{7}$

問4. ちょうど1回だけ負けて、それ以外は全て勝ったとき3段目にいたとする。このときあり得る手譜は「ゲー、ゲー」、「ゲー、チョキ」、「ゲー、パー」、「チョキ、ゲー」、「パー、ゲー」の5通りある。「ゲー、ゲー」は1回目のじゃんけんで負けても2回目のじゃんけんで負けても2回目のじゃんけんの後に3段目にいる。「ゲー、チョキ」と「ゲー、パー」は2回目のじゃんけんで負けると、2回目のじゃんけんの後に3段目にいる。「チョキ、ゲー」と「パー、ゲー」は1回目のじゃんけんで負けると、2回目のじゃんけんの後に3段目にいる。

(1) ちょうど1回だけ負けて、それ以外は全て勝ったとき6段目にいたとすると、このときあり得る手譜は15通りある。このうち「ゲー」を含まない手譜を全て列挙しなさい。

(2) ちょうど1回だけ負けて、それ以外は全て勝ったとき30段目にいたとする。このときあり得る手譜は何通りあるか答えなさい。

令和2年度 情報学群AO入試 B区分

数 学 ② $\frac{6}{7}$

問5. N 回じゃんけんをして、その結果 M 段目にいたとする。ただし、何回目に勝ったかや、何回勝ったかは分からないとする。

M は3の倍数なので $M = 3m$ とおく。 $N \leq m \leq 2N$ で、かつ m が奇数のとき、このような手譜が何通りあるかを m と N の式で書きなさい。式には数列の総和を表す記号 Σ や階乗の記号を残してもよい。

さらに、 $N = 8$ 、 $M = 27$ のとき、手譜が何通りあるか答えなさい。

令和2年度 情報学群AO入試 B区分

数 学 ② $\frac{7}{7}$

表 3: 2 の累乗と 3 の累乗の値の表

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$
$2^7 = 128$	$3^7 = 2,187$
$2^8 = 256$	$3^8 = 6,561$
$2^9 = 512$	$3^9 = 19,683$
$2^{10} = 1,024$	$3^{10} = 59,049$
$2^{11} = 2,048$	$3^{11} = 177,147$
$2^{12} = 4,096$	$3^{12} = 531,441$
$2^{13} = 8,192$	$3^{13} = 1,594,323$
$2^{14} = 16,384$	$3^{14} = 4,782,969$
$2^{15} = 32,768$	$3^{15} = 14,348,907$
$2^{16} = 65,536$	$3^{16} = 43,046,721$
$2^{17} = 131,072$	$3^{17} = 129,140,163$
$2^{18} = 262,144$	$3^{18} = 387,420,489$
$2^{19} = 524,288$	$3^{19} = 1,162,261,467$
$2^{20} = 1,048,576$	$3^{20} = 3,486,784,401$

数学②はここまで

下 書 用 紙