# 数　　学 

**Ⅰ** 次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) $x-\dfrac{1}{x}=5$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値を求めよ。

(2) 三角形ABCにおいて，$\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{BC}=5,\ \mathrm{CA}=7$ のとき $\sin A$ の値を求めよ。

(3) $x$ は $2\leqq x\leqq 7$ をみたす実数とする。次のデータについて，中央値と平均値の差の絶対値が１以下となるような $x$ の値の範囲を求めよ。

$$2,\quad x,\quad 7,\quad 7,\quad 8$$

(4) 大小２個のさいころを同時に投げるとき，目の積が４の倍数になる場合は何通りあるか。

(5) 男子３人と女子４人がくじ引きで一列に並ぶとき，男子が隣り合わない確率を求めよ。

(6) $(x-2)^7$ を展開したときの $x^4$ の係数を求めよ。

(7) ２次方程式 $x^2-5x-2=0$ の２つの解を $\alpha,\beta$ とするとき，$\alpha-1,\beta-1$ を解とする２次方程式を１つつくれ。

(8) 不等式 $x^2+y^2\leqq 1$ を満たす $x,y$ に対して，$x+2y$ の最大値を求めよ。

(9) 不等式 $\log_2 x+\log_2(3-x)\leqq 1$ を解け。

(10) 関数 $y=x^2-4x+9$ のグラフに原点から引いた接線のうち，傾きが小さい方の方程式を求めよ。

(11) 三角形OABにおいて，辺OAを $1:2$ に内分する点をC，辺OBを $3:1$ に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ。

(12) $n$ を自然数とする。和 $1\cdot 1+2\cdot 5+3\cdot 5^2+\cdots+n\cdot 5^{n-1}$ を求めよ。

〔 メ モ 欄 〕

Ⅱ　$k$ を実数とする。$xy$ 平面上において，２次関数 $y = x^2 - 2(k+1)x + 4k + 1$ で表される放物線の頂点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とする。次の各問に答えよ。

(1) $X, Y$ をそれぞれ $k$ を使って表せ。

(2) $Y > 0$ となるような $k$ の値の範囲を求めよ。

(3) $k$ が実数全体を動くときの点 P の軌跡 $C$ を求め，$x, y$ の方程式で表せ。

(4) (3) の曲線 $C$ と $x$ 軸，直線 $x = 4$ で囲まれた２つの部分のうち，$y \leqq 0$ をみたす部分の面積を求めよ。

〔 メ モ 欄 〕

Ⅲ 次の定理とその証明を読み，後の問に答えよ。

[定理] $m, n$ を２以上の互いに素である自然数とする。このとき，$ma + nb$（$a, b$ は０以上の整数）の形にかけない自然数全体の集合を $S$ とすると，$S$ に属する最大の自然数は $mn - m - n$ である。

[証明] まず，$mn - m - n \in S$ であることを背理法によって示す。$mn - m - n \notin S$ と仮定すると，$mn - m - n = ma + nb$ となる０以上の整数 $a, b$ が存在する。このとき

$$m(n - a - 1) = n(b + 1) \qquad (\star)$$

が成り立つ。右辺は $n$ で割り切れるから左辺も $n$ で割り切れ，$m$ は $n$ と互いに素だから $n$ は $n - a - 1$ を割り切る。このとき $_{(ア)}$$\underline{n - a - 1 \leqq 0 \text{ であるから}}$，$(\star)$ より $n(b + 1) \leqq 0$ となり矛盾が生じる。したがって $mn - m - n \in S$ である。

次に，$k$ を $mn - m - n + 1$ 以上の任意の自然数とし，$k \notin S$ であることを示す。$m, n$ は互いに素だから

$$mx + ny = k + m + n$$

をみたす $_{(イ)}$$\underline{\text{整数 } x, y \text{ が存在する。}}$ $mq < y \leqq m(q + 1)$ をみたす整数 $q$ をとる。このとき

$$mx + ny \leqq mx + mn(q + 1) = m(x + nq + n)$$

であるから

$$m(x + nq + n) \geqq {}_{(ウ)}\underline{k + m + n \geqq mn + 1} > mn$$

が成り立つ。よって $x + nq + n > n$ だから $x + nq > 0$ である。したがって

$$a = x + nq - 1, \quad b = y - mq - 1$$

とおくと，$a, b$ は０以上の整数で

$$\begin{aligned} ma + nb &= m(x + nq - 1) + n(y - mq - 1) \\ &= mx + mnq - m + ny - mnq - n \\ &= k + m + n - m - n = k \end{aligned}$$

が成り立つ。よって $k \notin S$ である。

以上より定理は示された。

〔メモ欄〕

[設問]

(1) $5a+7b$（$a, b$ は 0 以上の整数）の形にかける 24 以下の自然数をすべて求めよ。答のみでよい。

(2) 下線部（ア）の理由をわかりやすく説明せよ。

(3) 下線部（イ）においては，一般に次の命題が成り立つという事実が用いられている。

**命題** $m, n$ を互いに素である自然数とする。このとき，任意の整数 $N$ に対して，$mx+ny=N$ をみたす整数 $x, y$ が存在する。

この命題に関して，次の (a)(b) の問に答えよ。

(a) $m=5,\ n=2$ のとき，$mx_0+ny_0=1$ をみたす整数 $x_0, y_0$ が存在することを証明せよ。

(b) $m=5,\ n=2$ のとき，任意の自然数 $N$ に対して $mx+ny=N$ をみたす整数 $x, y$ が存在することを証明せよ。

(4) 下線部（ウ）の理由をわかりやすく説明せよ。

(5) $17a+11b=162$ をみたす 0 以上の整数 $a, b$ を一組求めよ。必要なら

$$17\cdot 17+11\cdot(-9)=190, \quad 17\cdot(-1)<-9\leqq 17\cdot 0$$

であることを用いてよい。

〔メモ欄〕