

- I**
- (1)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 27$
  - (2)  $\sin A = \frac{5\sqrt{3}}{14}$
  - (3)  $6 \leq x \leq 7$
  - (4) 15 通り
  - (5)  $\frac{2}{7}$
  - (6)  $-280$
  - (7)  $x^2 - 3x - 6 = 0$  (など)
  - (8)  $\sqrt{5}$
  - (9)  $0 < x \leq 1, 2 \leq x < 3$
  - (10)  $y = -10x$
  - (11)  $\vec{OP} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$
  - (12)  $\frac{1}{4}\left(n - \frac{1}{4}\right) \cdot 5^n + \frac{1}{16}$

II (1)  $y = x^2 - 2(k+1)x + 4k + 1$  より

$$y = \{x - (k+1)\}^2 - (k+1)^2 + 4k + 1$$

であるから

$$X = k+1, \quad Y = -(k+1)^2 + 4k + 1 = -k^2 + 2k \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

(2)  $Y > 0$  とすると  $-k^2 + 2k > 0$  より  $k^2 - 2k < 0$  となる。よって  $k(k-2) < 0$  だから  $0 < k < 2$  である。

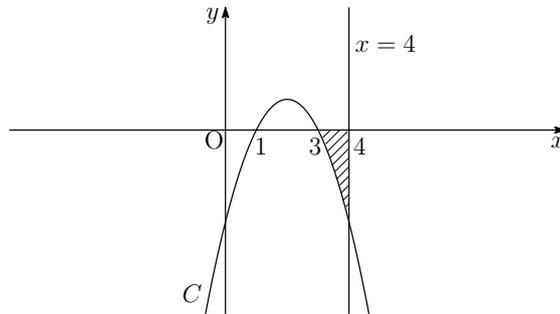
(3) ① より  $k$  を消去すると

$$Y = -(X-1)^2 + 2(X-1) = -X^2 + 4X - 3$$

となる。また、 $k$  が実数全体を動くとき、 $X = k+1$  も実数全体を動く。

以上より、求める軌跡は放物線  $y = -x^2 + 4x - 3$  である。

(4)  $-x^2 + 4x - 3 = 0$  とすると  $x^2 - 4x + 3 = 0$  より  $(x-1)(x-3) = 0$  である。よって  $x = 1, 3$  が得られる。グラフは図のようになる。



したがって、求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_3^4 \{-(-x^2 + 4x - 3)\} dx = \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_3^4 \\ &= \frac{4^3 - 3^3}{3} - 2(4^2 - 3^2) + 3(4 - 3) = \frac{37}{3} - 14 + 3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。

**III** (1) 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24

(2)  $a \geq 0$  より  $n - a - 1 < n$  なので,  $n - a - 1$  は  $n$  より小さい  $n$  の倍数となるから。

(3)(a)  $x = 1, y = -2$  とすれば  $mx + ny = 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 1$  である。

(b)  $x = N, y = -2N$  とすれば  $mx + ny = 5 \cdot N + 2 \cdot (-2N) = N$  である。

(4)  $k \geq mn - m - n + 1$  より

$$k + m + n \geq (mn - m - n + 1) + m + n = mn + 1$$

となるから。

(5) 証明の記述と  $17 \cdot 17 + 11 \cdot (-9) = 190, 17 \cdot (-1) < -9 \leq 17 \cdot 0$  より

$$a = 17 + 11 \cdot (-1) - 1 = 5, \quad b = -9 - 17 \cdot (-1) - 1 = 7$$

とおく。このとき

$$17a + 11b = 17 \cdot 5 + 11 \cdot 7 = 162$$

である。