数　学 ①　1/4

以下の問 **1**〜**3** のすべてに答えなさい。

問 1　関数 $f(x)$ を $f(x) = x^3 - 3x + 1$ とし，$y = f(x)$ のグラフに点 A $(2, a)$ から引ける接線の本数について考える。以下の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$・$\boxed{\text{コ}}$ にあてはまる数をそれぞれ答えなさい。また，空欄 $\boxed{\text{キ}}$・$\boxed{\text{ク}}$ に入れるのに最も適当なものを次ページの解答群のうちから一つずつ選びなさい。

(1)　関数 $f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}}\,x^2 - \boxed{\text{イ}}$$

となる。これより，関数 $f(x)$ は

$x = \boxed{\text{ウ}}$ で極大値 $\boxed{\text{エ}}$

$x = \boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カ}}$

をとる。

(2)　$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)\,x + \boxed{\text{キ}}$$

である。この直線が点 A を通るとき

$$\boxed{\text{ク}} = a \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。$y = f(x)$ のグラフに点 A から引ける接線の本数と，t についての方程式 ① の解の個数は一致する。$a = -5$ のとき，$y = f(x)$ のグラフに点 A から $\boxed{\text{ケ}}$ 本の接線が引ける。また，$a = -1$ のとき，$y = f(x)$ のグラフに点 A から $\boxed{\text{コ}}$ 本の接線が引ける。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

① $-2t^3+1$ ② t^3-3t+1 ③ $2t^3-1$ ④ $4t^3-6t+1$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

① $-2t^3+6t^2-5$ ② t^3+6t^2-3t-5 ③ $2t^3+6t^2-7$ ④ $4t^3+6t^2-6t-5$

問 2 a，b を定数とする。関数 $f(x)$ において，$f(x)$ が $x = \alpha$ で定義されていて，$\displaystyle\lim_{x\to\alpha-0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to\alpha+0} f(x)$ が存在し，ともに $f(\alpha)$ に等しいとき，$f(x)$ は $x = \alpha$ で連続であるという。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & (-1 < x < 1) \\ \dfrac{1}{x} & (x < -1,\ 1 < x) \\ \dfrac{2+a+b}{2} & (x = 1) \\ \dfrac{-a+b}{2} & (x = -1) \end{cases}$$

のとき，$f(x)$ がすべての実数 x で連続となるような a，b の値を求め，$y = f(x)$ のグラフをかきなさい。解答にあたっては，解答の過程も記述しなさい。

問 3 以下の問に答えよ。解答にあたっては，解答の過程も記述しなさい。

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $e^x > 1 + \dfrac{x^3}{6}$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) (1) で証明した不等式を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x}$ の値を求めなさい。

数学①はここまで