数　　学

Ⅰ　次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) $x^2-4xy+4y^2-9$ を因数分解せよ。

(2) 放物線 $y=x^2-4x+1$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(3) 次のデータの平均値が 4 であるとき，このデータの分散を求めよ。

$$1,\quad 2,\quad x,\quad 5,\quad 7$$

(4) 10 人の生徒の中から，委員長を 1 人，副委員長を 2 人選ぶとき，選び方は何通りあるか。

(5) 1 個のさいころを続けて 5 回投げるとき，5 以上の目がちょうど 2 回出る確率を求めよ。

(6) 2 次方程式 $x^2+2ax+a+2=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(7) r を正の定数とする。円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $3x-4y-20=0$ が接するとき，r の値を求めよ。

(8) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\cos 2\theta = -\cos\theta$ を解け。

(9) 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geqq 2$ を解け。

(10) 放物線 $y=x^2-3x+4$ と直線 $y=2x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(11) ベクトル $\overrightarrow{a}=(3,1)$ と $\overrightarrow{b}=(-2,4)$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とする。$\cos\theta$ の値を求めよ。

(12) 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=6,\quad a_{n+1}=4a_n-9\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

〔メモ欄〕

$\boxed{\text{II}}$ $\alpha = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$, $\beta = \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ とする。

(1) $\alpha^3+\beta^3$ と $\alpha\beta$ の値を求めよ。

(2) 変数 x, y に対して $u = x+y$, $v = xy$ とおく。x^3+y^3 を u, v で表せ。

(3) $t = \alpha+\beta$ とおく。t のみたす３次方程式をつくり，t の値を求めよ。

(4) $\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。

(5) n を自然数とし，$a_n = \alpha^n+\beta^n$ $(n \geqq 1)$ とおく。$n \geqq 3$ に対し，a_n を a_{n-1} と a_{n-2} で表せ。

(6) (5) の a_n に対し，$a_n > 800$ となる最小の n の値を求めよ。

〔 メ モ 欄 〕

Ⅲ 次の定理とその証明を読み，後の問に答えよ。

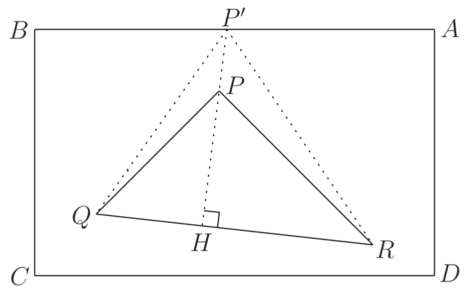
[定理] S を正の定数とする。面積 S の長方形の辺上あるいは内部に異なる3点 $\mathrm{P,Q,R}$ をとり，これらを頂点とする三角形をつくる。このとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積の最大値は $\dfrac{S}{2}$ である。

[証明] 与えられた長方形を ABCD とする。このとき $\mathrm{P=A, Q=B, R=C}$ とれば $_{(ア)}\underline{\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{S}{2}}$ である。したがって，$\mathrm{P,Q,R}$ の取り方によらず

$$\triangle\mathrm{PQR} \leqq \frac{S}{2} \qquad (\star)$$

が成り立つことを示せばよい。

まず，3つの頂点 $\mathrm{P,Q,R}$ がすべて長方形の辺上にある場合を考えれば十分であることを示す。P から直線 QR に下ろした垂線と直線 QR との交点を H，半直線 HP と長方形の辺の交点を $\mathrm{P'}$ とする（P が長方形の辺上にあれば $\mathrm{P'=P}$）。このとき $\mathrm{PH \leqq P'H}$ だから $_{(イ)}\underline{\triangle\mathrm{PQR} \leqq \triangle\mathrm{P'QR}}$ である。



点 $\mathrm{Q,R}$ に対しても，上の議論と同様にして点 $\mathrm{Q',R'}$ を定めると

$$_{(ウ)}\underline{\triangle\mathrm{PQR} \leqq \triangle\mathrm{PQ'R}, \quad \triangle\mathrm{PQR} \leqq \triangle\mathrm{PQR'}}$$

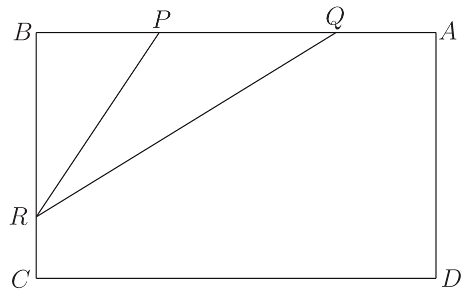
となる。よって，$_{(エ)}$<u>$\mathrm{P,Q,R}$ がすべて長方形の辺上にある場合に $(\star)$ を示せばよい。</u>

(I) 2点が同じ辺上にあるとき

$\mathrm{P,Q}$ が辺 AB 上にあり，R がそれ以外の辺上にあるとしてよい。このとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の底辺を PQ とみたときの高さは BC 以下だから

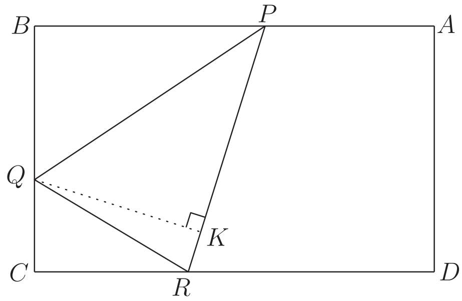
$$\triangle\mathrm{PQR} \leqq \frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{BC} \leqq \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC} = \frac{S}{2}$$

となる。



(II) 3 点がすべて異なる辺上にあるとき

P は辺 AB 上，Q は辺 BC 上，R は辺 CD 上にあるとしてよい。Q から直線 PR に下ろした垂線と直線 PR との交点を K とする。



(i) PR が AD と平行なとき

半直線 QK と直線 AD の交点を L とすると QL $\perp$ AD, QK $<$ QL であるから

$$_{(オ)}\underline{\triangle \mathrm{PQR} < \triangle \mathrm{AQD}} = \frac{S}{2}$$

が得られる。よって ($\star$) は成り立つ。

(ii) PR が AD と平行でないとき

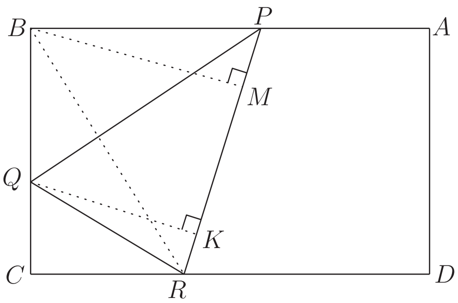
このとき AP $\neq$ DR である。AP $<$ DR ならば，B から直線 PR に下ろした垂線と直線 PR との交点を M とすると QK $<$ BM であり

$$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{QK} < \frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{BM} = \triangle \mathrm{PBR}$$

である。さらに

$$\triangle \mathrm{PBR} \leqq \triangle \mathrm{ABR} = \frac{S}{2}$$

であるから ($\star$) は成り立つ。



(カ) <u>AP $>$ DR の場合も同様である。</u>

以上より題意は示された。

[設問]

(1) 下線部（ア）の理由を説明せよ。

(2) 下線部（イ）の理由を説明せよ。

(3) 下線部（イ）と下線部（ウ）が下線部（エ）の理由になるのはなぜか。わかりやすく説明せよ。

(4) 下線部（オ）の理由を説明せよ。

(5) 下線部（カ）について，$AP > DR$ の場合に $(\star)$ が成り立つことを実際に証明せよ。

〔メモ欄〕