I

(1) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9 = (x-2y)^2 - 9 = (x-2y+3)(x-2y-3)$

(2) 求める放物線の方程式は $y = (x-2)^2 - 4(x-2) + 1 - 3$，すなわち $y = x^2 - 8x + 10$ である。

(3) 条件より $\dfrac{1+2+x+5+7}{5} = 4$ なので $x = 5$ である。よって分散は

$$\frac{1}{5}\{(1-4)^2 + (2-4)^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2\} = \frac{24}{5}$$

(4) $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2} = 360$（通り）

(5) ${}_5\mathrm{C}_2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{80}{243}$

(6) 判別式を D とすると $D/4 = a^2 - (a+2) = (a-2)(a+1)$ である。条件 $D > 0$ より，求める a の値の範囲は $a < -1, 2 < a$ である。

(7) 原点と直線 $3x - 4y - 20 = 0$ の距離は $\dfrac{|-20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4$ であるから，求める r の値は $r = 4$ である。

(8) 条件より $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$ であるから $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$ が得られる。よって $\cos\theta = -1, \dfrac{1}{2}$ だから $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5}{3}\pi$ である。

(9) 真数条件より $x - 3 > 0$ だから $x > 3$ である。問題の不等式から $-\log_2(x-3) \geqq 2$ だから $\log_2(x-3) \leqq -2$ となり $x - 3 \leqq 2^{-2}$ が得られる。これを解くと $x \leqq \dfrac{13}{4}$ だから，求める x の値の範囲は $3 < x \leqq \dfrac{13}{4}$ である。

(10) $x^2 - 3x + 4 = 2x$ とすると $(x-1)(x-4) = 0$ より $x = 1, 4$ である。よって求める面積は

$$\int_1^4 \{2x - (x^2 - 3x + 4)\}\,dx = -\int_1^4 (x-1)(x-4)\,dx = \frac{9}{2}$$

(11) $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ である。また $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = -2$ であるから，$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

(12) $a_{n+1} - 3 = 4(a_n - 3)\ (n \geqq 1)$ より $a_n - 3 = 4^{n-1}(a_1 - 3) = 3 \cdot 4^{n-1}$，つまり $a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 3\ (n \geqq 1)$ である。

II (1) $\alpha^3+\beta^3=18,\ \alpha\beta=1$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=u^3-3uv$

(3) (1), (2) より $t^3-3t=18$ であるから $(t-3)(t^2+3t+6)=0$ が得られる。t は実数だから $t^2+3t+6>0$ なので $t=3$ である。

(4) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot 1=7$ である。

(5) (1), (3) より $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$ である。したがって

$$a_n=\alpha^n+\beta^n=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=3a_{n-1}-a_{n-2}$$

が成り立つ。

(6) $a_3=18,\ a_4=47$ であるから

$$\begin{aligned}a_5&=3a_4-a_3=3\cdot 47-18=123,\\ a_6&=3a_5-a_4=3\cdot 123-47=322,\\ a_7&=3a_6-a_5=3\cdot 322-123=843\end{aligned}$$

となる。よって，求める n の値は $n=7$ である。

III

(1) $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} = S$ であるから，$\mathrm{P} = \mathrm{A}, \mathrm{Q} = \mathrm{B}, \mathrm{R} = \mathrm{C}$ のとき

$$\triangle \mathrm{PQR} = \triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} = \frac{S}{2}$$

である。

(2) 点 H の取り方から

$$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2} \mathrm{QR} \cdot \mathrm{PH}, \quad \triangle \mathrm{P'QR} = \frac{1}{2} \mathrm{QR} \cdot \mathrm{P'H}$$

であるから，$\mathrm{PH} < \mathrm{P'H}$ より $\triangle \mathrm{PQR} < \triangle \mathrm{P'QR}$ が成り立つ。

(3) 証明の中の議論にしたがって長方形の辺上の点 $\mathrm{P'}$ をとる。次に，$\triangle \mathrm{P'QR}$ の頂点 Q に対し，同様に $\mathrm{Q'}$ をとる。次に，$\triangle \mathrm{P'Q'R}$ の頂点 R に対し，同様に $\mathrm{R'}$ をとる。このとき

$$\triangle \mathrm{PQR} \leqq \triangle \mathrm{P'QR} \leqq \triangle \mathrm{P'Q'R} \leqq \triangle \mathrm{P'Q'R'}$$

である。$\mathrm{P'}, \mathrm{Q'}, \mathrm{R'}$ はすべて長方形の辺上にあるから，$\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ がすべて長方形の辺上にある場合に $(\star)$ を示せばよい。

(4) $\mathrm{QK} < \mathrm{QL}$ より

$$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2} \mathrm{PR} \cdot \mathrm{QK} < \frac{1}{2} \mathrm{PR} \cdot \mathrm{QL} = \frac{1}{2} \mathrm{AD} \cdot \mathrm{QL} = \triangle \mathrm{AQD}$$

であるから。

(5) $\mathrm{AP} > \mathrm{DR}$ とする。このとき，C から直線 PR に下ろした垂線と直線 PR との交点を N とすると $\mathrm{QK} < \mathrm{CN}$ であり

$$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2} \mathrm{PR} \cdot \mathrm{QK} < \frac{1}{2} \mathrm{PR} \cdot \mathrm{CN} = \triangle \mathrm{PCR}$$

である。さらに

$$\triangle \mathrm{PCR} \leqq \triangle \mathrm{PCD} = \frac{S}{2}$$

であるから $(\star)$ は成り立つ。