数　　学 1/6

問１

平面上に異なる４点 O，A，B，C があり，

$$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OC}$$

が成り立っている。また，３点 O，A，B は同一直線上にないとする。

⑴　$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

⑵　直線 AB と直線 OC の交点を P とする。線分の長さの比の値 $\dfrac{OP}{OC}$，$\dfrac{AP}{AB}$ を求めよ。

⑶　$|\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{OB}|=3$ とする。$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$ のとき，内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めよ。またこのとき，

四角形 OACB の面積を求めよ。

〔 メ モ 欄 〕

問２

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ で定義された関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2\sin\theta\cos^3\theta - 2\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta + 3$$

とする。また，$t = \sin 2\theta + \cos 2\theta$ とおく。

なお必要に応じて三角関数の加法定理　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,

および　$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ を用いてよい。

⑴　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，t の値の範囲を求めよ。

⑵　$f(\theta)$ を t を用いて表せ。

⑶　$f(\theta)$ の最大値，最小値とそのときの θ の値をそれぞれ求めよ。

〔メモ欄〕

問３

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+2x & (x \leqq 0)\\ x^2-2x & (x \geqq 0)\end{cases}$$

とする。a を実数の定数とし，直線 $y=ax$ と曲線 $y=f(x)$ が原点 O とは異なる２点 P，Q で交わるとする。ただし，P，Q の x 座標をそれぞれ x_1， x_2 とおくと， $x_1<0<x_2$ が成り立つとする。

⑴　x_1， x_2 の値をそれぞれ a を用いて表せ。また，a のとり得る値の範囲を求めよ。

⑵　曲線 $y=f(x)$ と線分 OP で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 $y=f(x)$ と線分 OQ で囲まれた部分の面積を S_2 とおく。S_1， S_2 をそれぞれ a を用いて表せ。

⑶　⑵で求めた S_1， S_2 に対して， $S(a)=S_1+S_2$ とおく。a が⑴で求めた範囲を変化するとき， $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。