数　　学

I 次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) 不等式

$$|x-1| < \frac{1}{2}x + 3$$

を解け。

(2) 2次関数 $y = x^2 - 2ax + 5$ のグラフが x 軸と接するとき，定数 a の値を求めよ。

(3) 次のデータについて，平均値と中央値の差の絶対値を求めよ。

$$2,\quad 3,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 13$$

(4) 10個の数字 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ を使って3けたの整数を作る。3けたの整数のうち，各けたの数字が異なるような奇数の個数を求めよ。

(5) 赤玉5個と白玉4個が入った袋から同時に3個の玉を取り出すとき，少なくとも1個は白玉を取り出す確率を求めよ。

(6) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ を因数分解せよ。

(7) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{8}$ のとき，$\sin\theta + \cos\theta$ の値を求めよ。

(8) 方程式 $\log_2(x+4) + \log_2(5-x) = \log_2(8-3x)$ を解け。

(9) 関数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値を求めよ。

(10) 放物線 $y = x^2 - 2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積と, 放物線 $y = x^2 - 2x$ と x 軸，および直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積の和を求めよ。

(11) ベクトル $\overrightarrow{a} = (3, -4)$ に垂直な単位ベクトルで，x 成分が正のものを求めよ。

(12) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{2021\cdot 2022}$ を求めよ。

〔 メ モ 欄 〕

Ⅱ 次の先生と生徒との会話を読み，後の問に答えよ。

先生　今日は面白い問題を用意してきたので，一緒に考えてみよう。図１を見てごらん。１辺の長さが１の小さな正方形（これを小正方形と呼ぶことにする）を縦に３個，横に４個並べて，長方形を作るよ。そして，対角線を１本引く。このとき，対角線と交わる小正方形の個数を求めたいんだ。

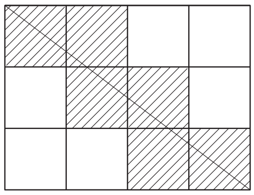


図１

生徒　へー。そんなこと，考えたこともなかったです。やってみます。図１で，斜線を引いてある小正方形の個数を数えればいいんですね。全部で （ア） 個です！

先生　正解。ただし，そのやり方だと，長方形が大きくなったときに，個数を数えるのが大変だと思わない？ そこで，もう少し上手な方法を考えてみようよ。

生徒　何だか難しそうで，心配です…。

先生　まあ，そう言わずにやってみようよ。図１の対角線は，小正方形を縦に３個，横に４個並べてできる長方形の内部にある縦の線と，何回交わるかな？

生徒　それは， （イ） 回ですね？

先生　その通り。じゃ，図１の対角線は，小正方形を縦に３個，横に４個並べてできる長方形の内部にある横の線と，何回交わるかな？

生徒　それは， （ウ） 回です。

先生　その通り。ということは，この対角線は，小正方形の辺（ただし頂点は除く）と，全部で （エ） 回，交わるということだ。こう考えると，わざわざ斜線を引いてある小正方形の個数を一つ一つ数えなくても，その個数を求められるよね？

生徒　えーっと…。（10 秒の沈黙。）あ，そうか！ 分かった分かった！

先生　さすがだね。それじゃ，少し数字を変えた問題を出そう。小正方形を縦に４個，横に５個並べて，長方形を作る。そして，１本の対角線を引く。このとき，対角線と交わる小正方形の個数を求めてごらん。

生徒　私はもう，いちいち図をかいて数えたりしません！ 答えは （オ） 個です！

先生　正解。じゃあ，小正方形を縦に 100 個，横に 101 個並べて，長方形を作った場合，１本の対角線と交わる小正方形の個数は？

生徒 （カ） 個です！

先生　大正解。もう完全にこの問題をマスターしたね。

生徒　ありがとうございます。ただ，この問題を考えていて，少し気になったんですが，もし１本の対角線が小正方形の頂点を通過することがあると，この考え方は使えないのではないですか？

先生　良いところに気が付いたね。じゃあ，試しに小正方形を縦に６個，横に８個並べてできる長方形を考えてみようか。ただしこれからは，対角線との共有点が頂点のみであるような小正方形は数えないものとするよ。

生徒　えーっと，小正方形を縦に６個，横に８個並べてできる長方形ということは，さっき考えた，小正方形を縦に３個，横に４個並べてできる長方形を縦に （キ） 個，横に （キ） 個，張り合わせているということですよね。（10 秒の沈黙。）そうか，分かった分かった！ ということは，１本の対角線と交わる小正方形の個数は （ク） 個になります！

先生　大正解。じゃあ，小正方形を縦に９個，横に 12 個並べてできる長方形の場合，１本の対角線と交わる小さな正方形の個数は？

生徒　はい， （ケ） 個です！

先生　OK。それじゃあ，最後に，ちょっと高度な問題を出すよ。来年度は 2022 年度になることに因んで，小正方形を縦に 2022 個，横に 600 個並べてできる長方形 の長方形を考えてみよう。１本の対角線と交わる小正方形の個数は？

生徒　えー，先生，それはさすがに私には難しすぎます…。

先生　そんなに心配することはないよ。まず，2022 と 600 の最大公約数はいくつかな。

生徒　（30 秒，計算する。）分かりました。 （コ） ですね。（10 秒の沈黙。）あ，分かった！この大きな長方形は，小正方形を縦に （サ） 個，横に （シ） 個並べてできる長方形を縦に （コ） 個，横に （コ） 個，張り合わせているということですよね！ ということは，１本の対角線と交わる小正方形の個数は （ス） 個になります！

先生　その通り。そろそろ，君自身が公式を作る準備が整ったみたいだ。k, a, b を自然数として，a, b は互いに素であるとしよう。分かっていると思うけど，互いに素とは，a, b の最大公約数が 1 ということだ。このとき，小正方形を縦に ka 個，横に kb 個並べてできる長方形の 1 本の対角線と交わる小正方形の個数は，いくつになるかな？

生徒　出来そうな気がします。ちょっと時間をください。（数分間，計算する。）求まりました！ $\boxed{（セ）}$ 個です！

先生　大正解！

生徒　ありがとうございます！ 最初に先生がおっしゃった通り，本当に面白い問題でした！

[設問]

(1) 空欄 $\boxed{（ア）}$〜$\boxed{（セ）}$ に入る数や式を解答用紙に書け。答えのみでよい。

(2) 座標平面上の放物線 C を以下で定義する。

$$C\colon y = \frac{1}{15}x(30 - x) \quad (0 \leqq x \leqq 30)$$

C によって二つの領域に分割されるような小正方形はいくつあるか。ただし小正方形とは，x, y 座標がともに整数であるような頂点と，長さが 1 の辺とで構成される正方形の，周および内部であるとする。

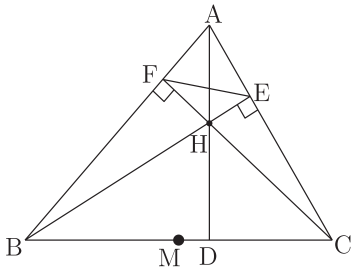
〔 メ モ 欄 〕

Ⅲ 次の定理とその証明を読み，後の問に答えよ。

$\triangle$ABC の各頂点から対辺またはその延長上に垂線を下ろすと，3 本の垂線は 1 点で交わる。

[証明] (ア) <u>$\triangle$ABC が直角三角形のとき，3 本の垂線は 1 点で交わる。</u>したがって，以下では $\triangle$ABC は鋭角三角形または鈍角三角形であるとしてよい。頂点 B から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC の交点を E，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB の交点を F とし，直線 BE と直線 CF の交点を H とおく。このとき，直線 AH と直線 BC が垂直に交わることを示せばよい。直線 AH と直線 BC の交点を D とし，辺 BC の中点を M とする。

(i) $\triangle$ABC が鋭角三角形のとき



上の図より $\angle\mathrm{AEH} = \angle\mathrm{AFH} = 90^\circ$ である。したがって，四角形 AFHE は円に内接する。なぜなら，一般に $\boxed{（イ）}$ からである。

よって $\angle\mathrm{EAH} = \angle\mathrm{EFC}$ である。なぜなら，一般に円上に弧 PQ があるとき，$\boxed{（ウ）}$ からである。

次に，$\angle\mathrm{BFC} = \angle\mathrm{BEC} = 90^\circ$ であるから，$\triangle$BFC と $\triangle$BEC はともに M を中心とする半径 BM の円に内接する。よって四角形 BCEF もこの円に内接するので，$\angle\mathrm{EFC} = \angle\mathrm{CBE}$ である。以上より，$\triangle$ACD と $\triangle$BCE において

$$\begin{cases} \angle\mathrm{C}\ \text{は共通} \\ \angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{EAH} = \angle\mathrm{EFC} = \angle\mathrm{CBE} \end{cases}$$

が成り立つ。したがって，$\boxed{（エ）}$。よって，$\triangle$ACD と $\triangle$BCE は相似である。

とくに，$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{BEC} = 90^\circ$ である。つまり，直線 AH と直線 BC は垂直に交わる。

(ii) $\triangle$ABC が鈍角三角形のとき

(i) と同様にして，(オ) <u>直線 AH と直線 BC は垂直に交わる</u>ことがわかる。

[設問]

(1) 下線部（ア）について。このことを証明せよ。

(2) 空欄 $\boxed{\text{（イ）}}$ に入る性質を述べよ。ただし，円周角という言葉を用いてはならない。

(3) 空欄 $\boxed{\text{（ウ）}}$ に入る適切な性質をかけ。ただし，円周角という言葉を用いてはならない。

(4) 空欄 $\boxed{\text{（エ）}}$ に入る相似条件をかけ。

(5) 下線部（オ）について。このことを証明せよ。