$\boxed{\text{I}}$

(1) $x \geqq 1$ のとき，不等式から $x < 8$ が得られる。また $x < 1$ のとき，不等式から $x > -\dfrac{4}{3}$ が得られる。よって解は $-\dfrac{4}{3} < x < 8$

(2) 方程式 $x^2 - 2ax + 5 = 0$ の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4} = a^2 - 5$ である。条件から $D = 0$ だから $a = \pm\sqrt{5}$

(3) 平均値・中央値はそれぞれ

$$\frac{1}{6}(2+3+3+5+7+13) = \frac{33}{6} = \frac{11}{2} = 5.5, \quad \frac{3+5}{2} = 4$$

だから，求める値は $|5.5 - 4| = 1.5$

(4) 一の位の選び方が 5 通り，それに対して百の位の選び方がそれぞれ 8 通り（0 は選べないことに注意），さらにそれに対して十の位の選び方がそれぞれ 8 通りあるから，求める個数は $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$ （個）

(5) $1 - \dfrac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = 1 - \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \dfrac{37}{42}$

(6) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x-3)(x^2-4) = (x-3)(x-2)(x+2)$

(7) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{5}{4}$ であり，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta + \cos\theta \geqq 0$ だから，$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(8) 真数は正だから $x + 4 > 0$ かつ $5 - x > 0$ かつ $8 - 3x > 0$ なので，$-4 < x < \dfrac{8}{3}$ である。このとき方程式を変形すると $(x+4)(5-x) = 8 - 3x$ が得られ，これを解くと $x = -2, 6$ となる。$-4 < x < \dfrac{8}{3}$ より $x = -2$

(9) $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$ だから，$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲ではこの関数は $x = -1$ で最大となる。最大値は 6

(10) 求める面積の和は

$$\int_0^2 \{-(x^2 - 2x)\}\,dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3 = \frac{8}{3}$$

(11) $\overrightarrow{a} = (3, -4)$ に垂直なベクトルは $(4t, 3t)$（t は実数）とかける。このベクトルの長さは $5|t|$ だから，単位ベクトルになるのは $t = \pm\dfrac{1}{5}$ のとき。このうち x 成分が正になるのは $t = \dfrac{1}{5}$ のときだから，求めるベクトルは $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

(12) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{2021 \cdot 2022} = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{2021} - \dfrac{1}{2022}\right) = 1 - \dfrac{1}{2022} = \dfrac{2021}{2022}$

II (1)
（ア）6
（イ）3
（ウ）2
（エ）5
（オ）8
（カ）200
（キ）2
（ク）12
（ケ）18
（コ）6
（サ）337
（シ）100
（ス）2616
（セ）$k(a+b-1)$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{15}x(30-x)$ とする。$0 \leqq x \leqq 30$ のとき，x と $f(x)$ がともに整数となるのは $x=0, 15, 30$ のとき，またそのときに限る。(理由。x と $f(x)$ がともに整数のとき，$x(30-x)$ は 15 の倍数であるから $x=0, 15, 30$ でなければならない。逆に，$x=0, 15, 30$ のとき，$f(x)$ は整数値をとる。)

C のうち $0 \leqq x \leqq 15$ の部分を C' とする。C' によって二つの領域に分割される小正方形の個数を n とすると，C の対称性から，求める個数は $2n$ である。

(1) と同様にして

$$n = 15 + f(15) - 1 = 15 + 15 - 1 = 29$$

であるから，求める個数は $2 \cdot 29 = 58$ である。

III

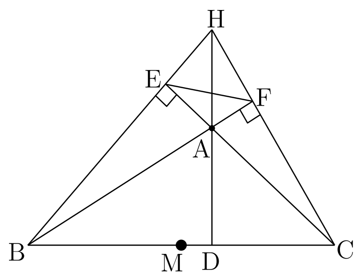
(1) $\angle$A が直角のとき，頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC の交点は頂点 A に一致する。また，頂点 C から辺 AB に下ろした垂線と辺 AB の交点も頂点 A に一致する。よって，3 本の垂線は頂点 A において交わる。

(2) 1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接する

(3) 円周上の 2 点 R, S が直線 PQ に関して同じ側にあるとき，つねに $\angle\mathrm{PRQ} = \angle\mathrm{PSQ}$ が成り立つ

(4) 2 組の角がそれぞれ等しい

(5) $\angle$A が鈍角のときは，次のような図が得られる。



上の図より $\angle\mathrm{AEH} = \angle\mathrm{AFH} = 90^\circ$ である。したがって，四角形 AFHE は円に内接する。よって $\angle\mathrm{CHD} = \angle\mathrm{FHA} = \angle\mathrm{FEA} = \angle\mathrm{FEC}$ である。

次に，$\angle\mathrm{BEC} = \angle\mathrm{BFC} = 90^\circ$ であるから，$\triangle\mathrm{BEC}$ と $\triangle\mathrm{BFC}$ はともに M を中心とする半径 BM の円に内接する。よって四角形 BCFE もこの円に内接するので，$\angle\mathrm{FEC} = \angle\mathrm{CBF}$ である。以上より，$\triangle\mathrm{HCD}$ と $\triangle\mathrm{BCF}$ において

$$\begin{cases} \angle\mathrm{C}\ \text{は共通} \\ \angle\mathrm{CHD} = \angle\mathrm{FEC} = \angle\mathrm{CBF} \end{cases}$$

が成り立つ。したがって，2 組の角がそれぞれ等しいから $\triangle\mathrm{HCD} \backsim \triangle\mathrm{BCF}$ である。よって $\angle\mathrm{HDC} = \angle\mathrm{BFC} = 90^\circ$。つまり，直線 AH と辺 BC は垂直に交わる。