数　　学

I 次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) $x = \dfrac{1}{3+\sqrt{7}},\ y = \dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$ のとき，x^2+y^2 の値を求めよ。

(2) 2次方程式 $x^2-2mx-m+6=0$ が異なる2つの実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(3) 次のデータについて，平均値と最頻値の差の絶対値を求めよ。

$$2,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 4,\quad 4,\quad 5,\quad 7$$

(4) 1個のさいころを3回続けて投げるとき，1回目は偶数の目，2回目は5以上の目，3回目は素数の目が出る確率を求めよ。

(5) $\mathrm{AB}=5,\ \mathrm{BC}=10,\ \mathrm{CA}=6$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円と辺 BC, CA, AB の接点を，それぞれ P, Q, R とする。BP の長さを求めよ。

(6) $P(x)=x^3-2x^2-5x+1$ を $x-3$ で割った余りを求めよ。

(7) 半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $x+2y-10=0$ が接するとき，r の値を求めよ。

(8) 不等式 $3^{3x-1} > \left(\dfrac{1}{9}\right)^x$ を解け。

(9) 関数 $y=x^2+7$ のグラフに点 $(3,0)$ から引いた接線の方程式をすべて求めよ。

(10) 曲線 $y=x^3-3x^2-4x$ と x 軸で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。

(11) 点 $(4,3)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{n}=(1,-2)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(12) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$$

〔 メ モ 欄 〕

$\boxed{\text{II}}$ 次の会話文を読み，後の設問に答えよ。

先生：n を２以上の自然数とする。$1, 2, 3, \cdots, n$ と番号が一つずつ書かれた n 枚のカードが，上から番号の小さい順に重ねられて，一つの山ができあがっているとする。このカードを使ってゲームをやってみないか。私が山の中から１枚を選ぶので，その１枚に書かれた番号 $f(n)$ を君が当てるというゲームだ。

生徒：面白そうです。僕がその番号を当てたら，僕の勝ちということですね。

先生：それでは，私が１枚のカードを選ぶ方法を言うよ。山の中にあるカードのうち，一番上のものを捨て，二番目に上のものを，山の一番下に回す。この操作を，山に対して何度も繰り返す。そして，山の中にあるカードが１枚だけになったところで，この操作を終える。その１枚が，私の選ぶ１枚だ。

生徒：１枚を選ぶ手続きがまだよく理解できていません …… 。

先生：例えば，１から５までの番号が書かれた５枚のカードの山があったとしよう。このとき，山の変化は

$$1, 2, 3, 4, 5 \implies 3, 4, 5, 2 \implies 5, 2, 4 \implies 4, 2 \implies 2 \quad \cdots \text{(i)}$$

となる。だから $f(5) = 2$ だ。

生徒：なるほど，ゲームのルールが分かりました。

先生：では，問題を出すよ。山が，１から４までの番号が一つずつ書かれた４枚のカードでできているとき，私が選ぶカードの番号 $f(4)$ はいくつかな。

生徒：１回の操作を行うごとに，操作によって山がどう変化していくかを考えればいいんですね。(i) にならって，山がどう変わっていくかを書いていきますね。

$$1, 2, 3, 4 \implies \boxed{\text{（ア）}} \implies \boxed{\text{（イ）}} \implies \boxed{\text{（ウ）}}$$

となるので，$f(4) = \boxed{\text{（ウ）}}$ です！

先生：OK だ。では，山が，１から８までの番号が一つずつ書かれた８枚のカードでできているとき，私が選ぶカードの番号 $f(8)$ はいくつかな。山が大きくなってきたけれども，落ち着いてやれば大丈夫だ。

生徒：分かりました。先ほどのように，(i) にならって，1回の操作を行うごとに山がどう変わっていくかを書いていきますね。

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \Longrightarrow \boxed{（エ）} \Longrightarrow \boxed{（オ）} \Longrightarrow \boxed{（カ）}$

$\Longrightarrow \boxed{（キ）} \Longrightarrow \boxed{（ク）} \Longrightarrow \boxed{（ケ）} \Longrightarrow \boxed{（コ）}$

となるので，$f(8) = \boxed{（コ）}$ です！

先生：大正解だ。ただし，もう少し楽に答えを求める方法を考えてみないか。最初に８枚のカードがあったが，操作を１回するたびに，山の中のカードの枚数が１ずつ減っていくよね。そして $\boxed{（サ）}$ のところで，カードが４枚になった。そこから先は，山がどう変化していくかを書き出さなくても，最後にどれが残るかは，分かってしまうんだよ。

生徒：え，本当ですか？ 僕にはその理由が全然分かりません。

先生：落ち着いて考えてごらん。先ほど，４枚のカードからなる山に対して操作を繰り返して，$f(4)$ を求めたよね。そのとき最後に残ったのは，最初の山の４枚のうち，上から $\boxed{（シ）}$ 番目のカードだった。ということは …… 。

生徒：（数秒間考える。）なるほど，ひらめきました！ カードの枚数が８から１ずつ減っていって，４になった時点で，最終的にどの位置にあるカードが残るかが決まってしまうんですね。

先生：よく気づいたね。これで，より一般的な議論をする準備が整ったようだ。$f(4)$ と $f(8)$ がいくつだったか思い出すと，N を自然数とするとき，$f(2^N) = \boxed{（ス）}$ が成り立つと予想できるよね。これを，(セ) 数学的帰納法を用いて証明してごらん。

生徒：分かりました。やってみます。（数分間作業をする。）先生，できました。

先生：よくできたね。最初の山が 2^{k+1} 枚のカードでできていたとき（ただし k は自然数），操作を $\boxed{（ソ）}$ 回繰り返すと，山の中にあるカードの枚数が 2^k 枚になることが，この証明のポイントだったね。

生徒：とても面白いゲームでした。ただ，n が２のべき乗 $(2, 4, 8, 16, \cdots)$ 以外のとき，$f(n)$ はどうやったら求められるか，気になります。

先生：それはぜひ自分で考えてごらん。まずは試しに $_{(タ)}$<u>$f(33)$ を求めてみたまえ</u>。操作を１回やれば，カードの枚数が $32(=2^5)$ になることに注意するんだよ。それが求まったら，次に $_{(チ)}$<u>$f(100)$ を求めてみるといいだろう</u>。操作を何回やると，カードの枚数が $64(=2^6)$ になるかを考えるとよいだろう。

生徒：分かりました。解き終わったら，また来させて頂きます！

設問

(1) 空欄（ア）〜（ス）を埋めよ。ただし（サ）には,（エ）〜（コ）のうち当てはまる記号をかけ。

(2) 下線部（セ）を実行せよ。

(3) 空欄（ソ）を埋めよ。

(4) 下線部（タ）を実行せよ。

(5) 下線部（チ）を実行せよ。

〔メ モ 欄〕

Ⅲ　次の会話文を読み，後の設問に答えよ。

先生：今日は三角関数の加法定理の勉強をしたいと思う。

生徒：それなら，覚えています。任意の実数 α, β に対して

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots \quad \text{(i)}\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots \quad \text{(ii)}\end{aligned}$$

が成り立つという定理です。でも，その理由が説明できるかというと，少し心配になります。

先生：そうだったのか。では，この定理がなぜ成り立つかを考えることから始めよう。まず，図１のように単位円周上に点 $\mathrm{A}(1,0)$ を描く。そして，A を，原点 O を中心に $\alpha+\beta$ だけ回転させた点を P とする。

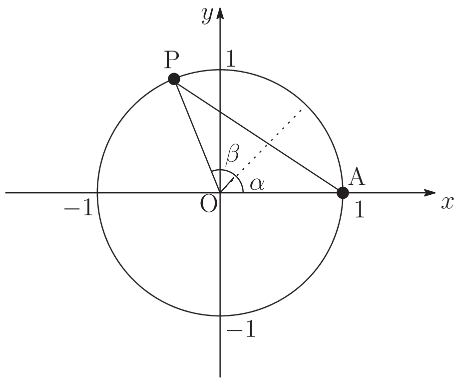

図１

生徒：とすると，点 P の座標は $\boxed{（ア）}$ となりますね。

先生：次に図２のように，２点 A, P を原点 O を中心に $-\alpha$ だけ回転させた点をそれぞれ Q, R とする。

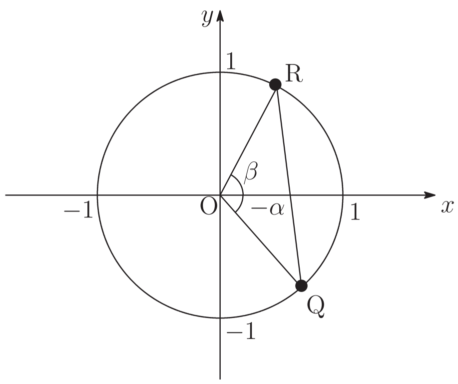

図２

生徒：少し話が複雑になってきましたけれども，頑張ります。点 Q の座標は $\boxed{（イ）}$ です。それから点 R の座標は $\boxed{（ウ）}$ です。

先生：とすると，2 点 A, P 間の距離の 2 乗と，2 点 Q, R 間の距離の 2 乗とを，それぞれ求めることができるはずだ。

生徒：やってみます。（数分間計算する。）できました。$\mathrm{AP}^2 = \boxed{（エ）}$ です。それから，$\mathrm{QR}^2 = \boxed{（オ）}$ です。

先生：ここでちょっと考えて欲しいことがある。2 点 A, P 間の距離の 2 乗と，2 点 Q, R 間の距離の 2 乗との間には，どのような関係式が成り立つかな。

生徒：（数秒間考える。）あっ，分かりました，$\boxed{（カ）}$ です！　なぜなら，一般に回転によって $\boxed{（キ）}$ からです。

先生：その通りだ。これで，君はもう自力で (i) を証明することができるはずだ。(ク)やってごらん。

生徒：（数分間計算する。）できました。自分が今まで使っていた公式の証明がやっと理解できて，一安心しました。ただ，少し心配が残っています。先ほど描いた図 1 と図 2 は，α や β が 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間にあるかのような図になっていますが，これとは違う状況もありうるんじゃないでしょうか。

先生：そういうところまで気配りができるのは立派なことだ。それでは，実際に試してみよう。例えば，$\alpha = -\dfrac{\pi}{6}, \beta = \dfrac{\pi}{3}$ だとしよう。この特別な場合に図 1 と図 2 を (ケ)実際に書き換えてごらん。これをそれぞれ図 3 と図 4 とするよ。

生徒：（数分間図を描く。）できました。

先生：すると，図 3 の中の点 P，図 4 の中の点 Q, R の座標は，先ほど α, β を使って表した座標に $\alpha = -\dfrac{\pi}{6}, \beta = \dfrac{\pi}{3}$ を代入したものと一致するね。

生徒：確かにその通りです。安心しました。

先生：以上で (i) が証明できたので，(ii) の公式もすぐに証明できるが，今日のところは時間がないので，これは省略する。それよりも，今証明した (i) を使って，もう少し発展的なことを考えてみよう。実は，θ を実数とすると，$\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ の整式で表すことができるんだ。考えてごらん。

生徒：（数分間考える。）方針が見えたような気がします。(コ)今からやってみます。

先生：よく頑張ったね。今日のところはここまでにしておこう。ただ，一般に，n を自然数とすると，$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ で表すこともできるんだよ。もしよかったら，自分でその理由を考えてみると面白いと思うよ。

生徒：分かりました。ありがとうございました。

設問

(1) 空欄（ア）～（オ）を埋める適切な座標や数式をかけ。ただし,（エ）は $\cos(\alpha+\beta)$ の式,（オ）は $\cos\alpha, \cos\beta, \sin\alpha, \sin\beta$ の式とする。また，空欄（カ）,（キ）を埋める適切な数式または語句をそれぞれ下の語群から選べ。

- 【（カ）の語群】
  ① $\mathrm{AP}^2 < \mathrm{QR}^2$　② $\mathrm{AP}^2 = \mathrm{QR}^2$　③ $\mathrm{AP}^2 > \mathrm{QR}^2$
- 【（キ）の語群】
  ① 2 点間の距離は大きくなる
  ② 2 点間の距離は変わらない
  ③ 2 点間の距離は小さくなる

(2) 下線部（ク）の指示に従い，(i) を証明せよ。

(3) 下線部（ケ）を実行し，図３と図４とを描け。単位円周上にプロットされた点の座標を示すなど，見やすく丁寧に描くこと。

(4) 下線部（コ）を実行せよ。

〔メモ欄〕