数　　　学 $\frac{1}{6}$

問１

平面上に一直線上にない３点 O，A，B がある。$\mathrm{OA}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OB}=2$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。線分 OA の中点を C，線分 BC を 3 : 1 に内分する点を D，直線 OD と線分 AB の交点を E とする。

⑴　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

⑵　線分 OA を直径とする円 R が点 E を通るとき，図を描き，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と三角形 OAB の面積 S_1 を求めよ。

⑶　⑵のとき，円 R と線分 OB の交点のうち O でない方の点を F とする。線分 EF の長さと三角形 OEF の面積 S_2 を求めよ。

〔メモ欄〕

問 2

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2\cos 4\theta + 4\cos^2\theta - 3$$

とする。

なお，必要に応じて三角関数の加法定理 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$，および $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ を用いてよい。

⑴ $\cos 2\theta = t$ とおくとき，$f(\theta)$ を t を用いて表せ。

⑵ $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

⑶ a を実数の定数とする。θ についての方程式 $f(\theta) = a$ が異なる 4 個の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

〔メモ欄〕

問３

３次関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+20$$

とし，$y=f(x)$ のグラフを C とする。また，t を実数とし，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における C の接線を ℓ とする。

⑴　関数 $f(x)$ の増減，極値を調べて，グラフをかけ。

⑵　接線 ℓ の方程式を求めよ。

⑶　関数 $f(x)$ が極小値をとる点を A とする。接線 ℓ が点 A を通るとき，点 P の座標を求めよ。
ただし P は A とは異なる点とする。

⑷　⑶のとき，点 P を通り傾きが $\frac{1}{2}$ の直線を m とする。C と m の交点のうち第２象限にある点を Q とするとき，C と線分 PQ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

〔メモ欄〕