数　　学

Ⅰ 次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) 連立不等式

$$\begin{cases} 4x+3 \geqq 9x-1 \\ -2x+3 < x+5 \end{cases}$$

を解け。

(2) 頂点が $(1,3)$ で，点 $(2,1)$ を通る放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(3) 次のデータの四分位範囲を求めよ。

$$3,\quad 5,\quad 7,\quad 5,\quad 3,\quad 1,\quad 2,\quad 8,\quad 5$$

(4) 等式 $x+y+z+w=10$ を満たす負でない整数の組 (x,y,z,w) は全部で何個あるか求めよ。

(5) 円 O の外部の点 P から円 O に引いた接線の接点を T とする。P を通る直線が円 O と２点 A, B で交わっており，$\mathrm{PA}=3$, $\mathrm{PB}=6$ である。このとき PT の長さを求めよ。

(6) ４次方程式 $x^4-9x^2+20=0$ を解け。

(7) ２点 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,0)$ からの距離の比が $1:\sqrt{2}$ であるような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(8) $\log_2 3 \cdot \log_2 \dfrac{\sqrt{2}}{5} \cdot \log_3 4$ を簡単にせよ。

(9) 方程式 $x^3-3x^2-9x=a$ が相異なる３個の実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(10) 放物線 $y=x(4-x)$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(11) $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(-3,2)$, $\mathrm{C}(1,4)$ とする。点 A から直線 BC に下ろした垂線と BC の交点を H とする。H の座標を求めよ。

(12) 条件 $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-2$ $(n \geqq 1)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

〔 メ モ 欄 〕

Ⅱ 次の会話文を読み，後の設問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(i) 先生と 4 人の生徒 A さん，B さん，C さん，D さんがいます。先生が A さん，B さん，C さんにそれぞれカードを 1 枚ずつ渡して言いました。「A さんと C さんのカードには 2 けたの自然数，B さんのカードには 2 以上の 1 けたの自然数が書いてあります。A さんの数と B さんの数の積が C さんの数と等しくなっています。」（A さん，B さん，C さんはそれぞれ自分のカードの数しか知りません。）

(ii) さらに先生は言いました。「C さんの数は 50 以下です。自分のカードの数だけを手がかりに, 他の 2 人のカードの数を当ててみてください。」

(iii) 3 人はいろいろと考えていましたが, しばらくして B さんが言いました。「私には他の 2 人の数がわかりません。」

(iv) さらに A さんが言いました。「私にも他の 2 人の数がわかりません。」

(v) すると C さんが「それを聞いて, いま私には他の 2 人の数がわかりました。A さんのカードの数は 12 です」と言いました。

A さん, B さん, C さんのカードの数をそれぞれ a, b, c とします。D さんは誰のカードの数も見ていませんが，次の解法のように考えて a,b,c を知ることができました。

[解法] まず (i) から

$$a \geqq \boxed{\text{（ア）}},\quad b \geqq 2,\quad ab = c \qquad (\star)$$

がわかる。

次に (ii) から $c \leqq 50$ である。これと $(\star)$ からまず

$$2 \leqq b \leqq \boxed{\text{（イ）}}$$

がわかる。さらに，上の不等式を満たす自然数のうち，(iii) から $b = \boxed{\text{（ウ）}}$ はありえないことがわかる（もし $b = \boxed{\text{（ウ）}}$ なら，B さんには $a = \boxed{\text{（エ）}}$, $c = \boxed{\text{（オ）}}$ であることがわかってしまうから (iii) と矛盾する)。したがって，b の取りうる値を小さい順に書くと

$$b = \boxed{\text{（カ）}}, \boxed{\text{（キ）}}, \boxed{\text{（ク）}} \qquad (\star\star)$$

となる。

次に (iv) から $a \leqq \boxed{\text{（ケ）}}$ がわかる（そうでなければ，A さんには $b = 2$ であることがわかり，したがって c の値もわかってしまうから (iv) と矛盾する）。
次に (v) から $c = 12b$ である。これと $(\star\star)$ から，c の取りうる値を小さい順に書くと

$$c = \boxed{\text{（コ）}}, \boxed{\text{（サ）}}, \boxed{\text{（シ）}}$$

となる。
このうち，もし $c = \boxed{\text{（ス）}}$ ならば，自分のカードの数の約数を考えることにより，(iv) の発言を聞く前に C さんには $(a, b) = \left(\boxed{\text{（セ）}}, \boxed{\text{（ソ）}}\right)$ であることがわかってしまう。
また，もし $c = \boxed{\text{（タ）}}$ ならば，(iv) の発言を聞いても C さんには他の 2 人の数がわからない（この場合 $(a, b) = \left(\boxed{\text{（チ）}}, \boxed{\text{（ツ）}}\right), \left(\boxed{\text{（テ）}}, \boxed{\text{（ト）}}\right)$ の 2 組の可能性がある）。
以上より，$c = \boxed{\text{（ナ）}}$ であることがわかる。このことから b の値もわかる。

設問

(1) 最も適切な自然数を空欄（ア）～（ナ）に記せ。ただし，（チ）$<$（テ）とする。

(2) A さん，B さん，C さんに別のカードが配られたが，(i)～(iv) までの発言は変わらなかった。その後 C さんが「それを聞いて，いま私には他の 2 人の数がわかりました。B さんのカードの数は 4 です」と言った場合，c の取りうる値をすべて挙げよ。

Ⅲ　次の定理とその証明の概略を読み，後の設問に答えよ。

[定理] △ABC の外接円の半径を R, 内接円の半径を r とする。また，∠A, ∠B, ∠C の大きさをそれぞれ A, B, C とする。

(i) 等式

$$r(\sin A + \sin B + \sin C) = 2R \sin A \sin B \sin C \quad \cdots ①$$

が成り立つ。

(ii) 等式

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \cdots ②$$

が成り立つ。

(iii) $R \geqq 2r$ が成り立つ。

[証明の概略]

(i) $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$ とし, △ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}ab\sin C \quad \cdots ③$$

である。ここで正弦定理より

$$a = \boxed{\text{（ア）}}, \quad b = \boxed{\text{（イ）}}, \quad c = \boxed{\text{（ウ）}}$$

であるから，(エ) これらを ③ に代入して整理すると ① が得られる。

(ii) $A + B + C = \pi$ より

$$\sin C = \sin\{\pi - (A+B)\} = \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

である。よって

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B + \sin C &= \sin A + \sin B + \sin A\cos B + \cos A\sin B \\ &= \sin A(1+\cos B) + \sin B(1+\cos A)\end{aligned}$$

である。(オ) 右辺を，正弦の２倍角の公式と余弦の半角の公式を利用して書きかえ，整理すると

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2} \quad \cdots ④$$

が得られる。$A + B + C = \pi$ を利用して，(カ) 右辺の $\sin\dfrac{A+B}{2}$ を変形すると ② が得られる。

(iii) ① の右辺において

$$\begin{aligned}\sin A\sin B\sin C &= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。これと ①, ② から

$$r = \boxed{（キ）}$$

が得られる。したがって

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \boxed{（ク）}$$

を示せばよい。積を差に変える公式より

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

である。また

$$\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{\pi-(A+B)}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{A+B}{2}$$

である。$\cos\dfrac{A+B}{2}$ を x とおくと $_{(ケ)}\underline{x > 0}$ であり

$$\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{A+B}{2}\\ &= \frac{1}{2}x\left(\cos\frac{A-B}{2} - x\right)\\ &\leqq {}_{(コ)}\underline{\frac{1}{2}x(1-x) \leqq \boxed{（ク）}}\end{aligned}$$

が得られる。

以上から $R \geqq 2r$ が示された。

設問

(1) a, b, c を $R, \sin A, \sin B, \sin C$ で表す適切な式を空欄（ア）〜（ウ）に記せ。答のみでよい。

(2) 下線部（エ）を実行せよ。

(3) 下線部（オ）を実行し，式 ④ を導出せよ。

(4) 下線部（カ）を実行せよ。

(5) r を $R, \sin\dfrac{A}{2}, \sin\dfrac{B}{2}, \sin\dfrac{C}{2}$ で表す適切な式を空欄（キ）に記せ。答のみでよい。

(6) 空欄（ク）に当てはまる適切な値を記せ。答のみでよい。

(7) 下線部（ケ）の理由を答えよ。

(8) 下線部（コ）の不等式を示せ。

〔 メ モ 欄 〕