令和６年度 情報学群 総合型選抜 B区分

数　学　②　1/2

問 1〜3 のすべてに解答しなさい。問２・３は解答の過程も記述しなさい。

問 1　以下の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{コ}}$ にあてはまる数をそれぞれ答えなさい。

(1)　異なる 10 個の整数 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 から異なる 2 個の数を選び，選んだ 2 個の数を小さい方から a, b とする。

(i)　2 個の数 a, b の組は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 個ある。

(ii)　$a + b = 10$ を満たすような 2 個の数 a, b の組は全部で $\boxed{\text{イ}}$ 個ある。

(iii)　$b - a$ の値が 5 となるような 2 個の数 a, b の組は全部で $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある。

(iv)　$b - a$ の値が偶数となるような 2 個の数 a, b の組は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個ある。

(v)　$b - a$ の値が 3 の倍数となるような 2 個の数 a, b の組は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個ある。

(2)　異なる 8 個の整数 $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8$ から異なる 2 個の数を選び，選んだ 2 個の数を小さい方から X, Y とし，$X = 2^x$，$Y = 2^y$ とする。

(i)　$XY = 1024$ のとき，$x + y = \boxed{\text{カ}}$ であり，そのような 2 個の数 x, y の組は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 個ある。

(ii)　$\dfrac{Y}{X} = 8$ となるような 2 個の数 x, y の組は全部で $\boxed{\text{ク}}$ 個ある。

(iii)　2 個の数 X, Y の組は全部で $\boxed{\text{ケ}}$ 個あり，このすべての組についての $\dfrac{Y}{X}$ の値の総和は $\boxed{\text{コ}}$ である。

問２　n を自然数とする。n 個の偶数 $2, 4, 6, \ldots, 2n$ を無作為に並べた数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ を考える。次の各問に答えなさい。解答にあたっては，解答の過程も記述しなさい。

(1)　$n=6$ のとき，以下の値を答えなさい。

(i)　$(a_1, a_2, \ldots, a_6)=(2, 4, 6, 8, 10, 12)$ であるときの $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k$ および $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(a_k-2k)^2$

(ii)　$(a_1, a_2, \ldots, a_6)=(8, 4, 2, 6, 12, 10)$ であるときの $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k$ および $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(a_k-2k)^2$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ を n の式で表しなさい。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-2k)^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k-2n+2k-2)^2$ を n の式で表しなさい。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-2k)^2$ が最大になる条件は

$$a_k=2n-2k+2 \qquad (k=1, 2, 3, \ldots, n)$$

であることを証明しなさい。

問３　n を２以上の自然数とする。a, b を n 個の整数 $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$ のうちの異なる２個の数とし，$a<b$ とする。このようなすべての組 (a, b) についての $\dfrac{b}{a}$ の値の総和を S_n とする。次の各問に答えなさい。解答にあたっては，解答の過程も記述しなさい。

(1)　等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}=(n-1)\cdot 2^n+1$ を数学的帰納法を用いて証明しなさい。

(2)　S_n を n の式で表しなさい。

数学②はここまで。