令和６年度 システム工学群 総合型選抜

数　　学

問 1

平面上に三角形 OAB がある。辺 OA を 1 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。

⑴　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

⑵　直線 OP と直線 CD の交点を Q とする。CQ : QD，OQ : QP を求めよ。

⑶　4 点 A，B，C，D が 1 つの円 S 上にあり，$\mathrm{OA}=3\sqrt{5}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{30}$ とする。辺 OB の長さと内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

〔 メ モ 欄 〕

問 2

　$AB=1$， $BC=2$， $CD=3$， $DA=4$ の四角形 ABCD がある。四角形 ABCD の面積を S, $\angle ABC=\alpha$, $\angle CDA=\beta$ とおく。ただし，四角形 ABCD の 4 つの内角はすべて 180°より小さいものとする。なお, 必要に応じて三角関数の加法定理 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ，および $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ を用いてよい。

⑴ S を $\sin\alpha$ ， $\sin\beta$ を用いて表せ。

⑵ 対角線 AC の長さを $\cos\alpha$ を用いて表せ。また，対角線 AC の長さを $\cos\beta$ を用いて表せ。

⑶ S^2 を $\cos(\alpha+\beta)$ の式で表せ。

⑷ S の最大値，およびそのときの $\sin\alpha$ ， $\cos\alpha$ の値を求めよ。

〔メモ欄〕

問 3

O を原点とする座標平面上に，曲線

$$C : y = -x^2 + 2x + 3$$

と，2 点 A(0,　3)，B(3,　0) がある。また，$0 < p < q < 3$ とし，x 座標が p，q である C 上の 2 点をそれぞれ P，Q とする。また，五角形 OAPQB の面積を S とおく。

⑴ S を p，q を用いて表せ。

⑵ q を固定し，p を $0 < p < q$ で変化させるとき，S の最大値を q を用いて表せ。

⑶ S の最大値を求めよ。

〔 メ モ 欄 〕