数　　学

Ⅰ 次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}},\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき, x^2+y^2 の値を求めよ。

(2) 次のデータの平均値が 4 であるとき，中央値を求めよ。

$$3,\quad 2,\quad 5,\quad 4,\quad 7,\quad x$$

(3) 3 個のさいころを同時に投げるとき，2 つ以上の目が同じである確率を求めよ。

(4) $\mathrm{AB}=10,\ \mathrm{BC}=12,\ \mathrm{CA}=7$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。線分 BD の長さを求めよ。

(5) 直線 $y=2x-1$ に関して, 点 $(3,7)$ と対称な点の座標を求めよ。

(6) $0 \leqq \theta < \pi,\ \cos\theta = \dfrac{1}{5}$ のとき，$\sin 2\theta$ の値を求めよ。

(7) 方程式 $2\cdot 4^x - 3\cdot 2^x + 1 = 0$ を解け。

(8) 関数 $y = x^3 - 6x + 5$ の極大値を求めよ。

(9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{k(k+5)-(k+1)^2\}$ を求めよ。

(10) 二項分布 $B\left(7, \dfrac{1}{4}\right)$ の標準偏差を求めよ。

〔メモ欄〕

$\boxed{\text{II}}$ k を 0 以上の実数とする。実数 x が $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲を動くとき, x の 2 次関数 $f(x) = x^2 - 4kx + 3k^2 - 2k + 12$ の最小値を $g(k)$ とする。次の各問に答えよ。

(1) $g(1)$ の値を求めよ。

(2) $g(2)$ の値を求めよ。

(3) $g(k)$ を k の式で表せ。

(4) k が 0 以上の実数全体を動くとき, $g(k)$ の最小値を m とする。m の値を求めよ。

〔メモ欄〕

Ⅲ 次の文章を読み，あとの設問に答えよ。

自然数 $N \geqq 5$ を相異なる自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(a_1 < a_2 < \cdots < a_m)$ の和に分割（つまり $N = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$）し，積 $P = a_1 a_2 \cdots a_m$ をつくる。ただし, $m = 1$ のときは $P = N$ とする。

例えば $N = 10$ のとき, $N = 4+6$ と分割すると $P = 4 \cdot 6 = 24$ であり，$N = 2+3+5$ と分割すると $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ である。与えられた N に対して, P が最大となるような分割を「最適分割」とよぶことにする。最適分割について，次のことがわかる。

[命題] 分割

$$N = a_1 + a_2 + \cdots + a_m \quad (a_1 < a_2 < \cdots < a_m) \qquad (\star)$$

が最適分割であるとき, 次が成り立つ。

(i) $m \geqq 2$ である。

(ii) $a_1 = 2$ または $a_1 = 3$ である。

(iii) $a_{i+1} - a_i = 1$ または $a_{i+1} - a_i = 2$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ である。

(iv) $a_{i+1} - a_i = 2$ となる i は多くても 1 つである。

(v) $N = 50$ のとき, 最適分割は次で与えられる。

$$N = 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

[証明の概略]

まず, 命題 (i)(ii)(iii)(iv) について, それぞれ背理法を用いて証明をしていく。

(i) 分割 $(\star)$ において $m = 1$ とすると $P = N$ となる。しかし, N の分割として $N = 2 + (N-2)$ を考えると $\underline{P = 2(N-2) > N}_{(ア)}$ となるため, 分割 $(\star)$ が最適分割であることに反する。よって, $m \geqq 2$ となる。

(ii) 分割 $(\star)$ において $a_1 = 1$ だとする。このとき, $a_1 = 1$ を取り除いて a_m を $a_m + 1$ に取り替えると P の値はより大きくなるから, $(\star)$ が最適分割であることに反する。

分割 $(\star)$ において $a_1 \geqq 5$ とすると, $2 < a_1 - 2$, $2(a_1 - 2) > a_1$ が成り立つ。すると a_1 を 2 と $a_1 - 2$ に分けると新しい分割が得られ, P の値は大きくなるから, $(\star)$ が最適分割であることに反する。

次に, 分割 $(\star)$ において $a_1 = 4$ とすると $a_2 \geqq 5$ である（(i) より $m \geqq 2$ であることに注意)。このとき $a_1 = 4$ と a_2 を $2, 3, a_2 - 1$ に取り替えると和は変わらないから新しい分割が得られる。このとき

$$2 \cdot 3 \cdot (a_2 - 1) = \underline{6(a_2 - 1) > 4a_2}_{(イ)}$$

であるから P の値が大きくなり, $(\star)$ が最適分割であることに反する。以上より $a_1 = 2$ または $a_1 = 3$ である。

〔メモ欄〕

(iii) 分割 $(\star)$ のある i について $a_{i+1}-a_i \geqq 3$ が成り立つとする。このとき, a_i, a_{i+1} を $a_i+1, a_{i+1}-1$ に取り替えると新しい分割が得られ, これによって P の値はより大きくなる。(ウ) これは $(\star)$ が最適分割であることに反する。したがって $a_{i+1}-a_i \leqq 2$ $(i=1,2,\ldots,m-1)$ である。

(iv) 分割 $(\star)$ において, $a_{i+1}-a_i=2$ となる i が 2 つ以上あったとする。つまり, $a_{i+1}-a_i=2, a_{j+1}-a_j=2$ となる i, j $(1 \leqq i < j \leqq m-1)$ があったとする。このとき a_i, a_{j+1} を $a_i+1, a_{j+1}-1$ に取り替えることにより, 新しい分割が得られ, P の値は大きくなる。これは $(\star)$ が最適分割であることに反する。したがって, $a_{i+1}-a_i=2$ となる i は多くても 1 つである。

(v) まず (ii)(iii)(iv) に注意して $N=50$ のとき $m=8$ であることを示し, その後具体的な最適分割を求める。
まず, 分割 $(\star)$ において $m \leqq 7$ が成り立つとする。 (ii) より $a_1 \leqq 3$ のため, 分割に現れる数をなるべく大きくしても

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=\boxed{(\text{エ})}$$

となり, $N=50$ であることに矛盾する。
次に, 分割 $(\star)$ において $m \geqq 9$ が成り立つとする。(ii) より $a_1 \geqq 2$ のため, 上と同様に議論すると $N=50$ であることに矛盾する。(オ)
以上より, 分割 $(\star)$ において $m=8$ が成り立つ。
次に, 分割 $(\star)$ において $m=8$ かつ $a_1=3$ が成り立つとすると, 上と同様にして $N=50$ であることに矛盾する。よって $a_1=2$ である。
したがって, $N=50$ のときの分割 $(\star)$ は $a_1=2$ を含む 8 つの数による分割だとわかる。さらに (iv) より, $a_{i+1}-a_i=2$ となる i は多くても 1 つだから, 条件を満たす分割は

$$50=2+3+5+6+7+8+9+10$$

しかない。これが求める分割である。

設問

(1) 下線部 (ア) を証明せよ。

(2) 下線部 (イ) を証明せよ。

(3) 下線部 (ウ) を証明せよ。

(4) 空欄 (エ) に当てはまる数字を記入せよ。答のみでよい。

(5) 下線部 (オ) を証明せよ。

(6) $N=15$ に対して最適分割を求めよ。答のみでよい。

〔メモ欄〕