# 高知工科大学情報学群 平成32年度AO入試
# 学群適性検査 数学① 参考問題

A区分: **問1**に答えなさい。

B区分: **問1〜3**に答えなさい。

**問1.** 関数 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx + l$ とする。(1)・(2) に答えなさい。

(1) 関数 $f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件を調べたい。空欄 $\boxed{\text{ア}}$・$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数を答えなさい。また，空欄 $\boxed{\text{ウ}}$・$\boxed{\text{エ}}$ に入れるのに最も適当なものを下のそれぞれの解答群のうちから一つずつ選びなさい。

関数 $f(x)$ を微分すると，$f'(x) = \boxed{\text{ア}}x^2 + \boxed{\text{イ}}x + k$ となる。関数 $f(x)$ が極大値と極小値をもつには，方程式 $f'(x) = 0$ が $\boxed{\text{ウ}}$ ことが必要である。二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が $\boxed{\text{ウ}}$ のは，解の個数の判別式 $D = b^2 - 4ac$ が $\boxed{\text{エ}}$ となるときである。係数を代入して不等式を解くと $k < \boxed{\text{オ}}$ となり，これが関数 $f(x)$ が極大値と極小値をもつ条件である。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ 2つの異なる解をもつ　① 1つの解（重解）をもつ　② 解をもたない

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $D < 0$　① $D = 0$　② $D > 0$

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が 3 つの異なる解をもつための条件を調べたい。簡単のため，ここでは $k = -9$ とする。空欄 $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{シ}}$・$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまる数を答えなさい。また，空欄 $\boxed{\text{キ}}$〜$\boxed{\text{サ}}$ に入れるのに最も適当なものを下の解答群のうちから一つずつ選びなさい。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

$k = -9$ を代入して方程式 $f'(x) = 0$ を解くと，2つの解 $\alpha = -3$，$\beta = \boxed{\text{カ}}$ を得る。関数 $f'(x)$ は，$x < \alpha$ において $f'(x)\boxed{\text{キ}}$，$\alpha < x < \beta$ において $f'(x)\boxed{\text{ク}}$，$\beta < x$ において $f'(x)\boxed{\text{ケ}}$ である。この $f'(x)$ の正負の関係から関数 $y = f(x)$ のおよその形が分かる。方程式 $f(x) = 0$ が3つの異なる解をもつための条件は，$f(\alpha)\boxed{\text{コ}}$ かつ $f(\beta)\boxed{\text{サ}}$ である。具体的に数を代入して条件を計算すると，$\boxed{\text{シ}} < l < \boxed{\text{ス}}$ となる。

$\boxed{\text{キ}}$〜$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ $< 0$　① $= 0$　② $> 0$

**問 2.**　$a, b$ は定数で，$a > 0$ とする。関数 $f(x) = \dfrac{x+b}{x^2+a}$ の最大値が $\dfrac{1}{12}$，最小値が $-\dfrac{1}{4}$ のとき，定数 $a, b$ の値を求めよ。

**問 3.**　関数 $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と定義される。この定義を用いて，積の導関数

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を証明せよ。ただし，次の 2 つは証明せずに使ってよい。

- 関数 $f(x)$，$g(x)$ がそれぞれ導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ をもつ。
- $\displaystyle\lim_{h \to 0} p(h)$ と $\displaystyle\lim_{h \to 0} q(h)$ が値をもつ（発散しない）とき，

  $$\lim_{h \to 0}\{p(h) + q(h)\} = \lim_{h \to 0} p(h) + \lim_{h \to 0} q(h)$$
  $$\lim_{h \to 0}\{p(h)\,q(h)\} = \lim_{h \to 0} p(h)\ \lim_{h \to 0} q(h)$$

  が成り立つ。

# 高知工科大学情報学群 平成 32 年度 AO 入試
# 学群適性検査 数学① 参考問題 正解

**問 1.** (1) ア 3　イ 6　ウ ⓪　エ ②　オ 3

(2) カ 1　キ ②　ク ⓪　ケ ②　コ ②　サ ⓪　シ $-27$　ス 5

**問 2.** （解答例）

関数 $f(x)$ を微分する。

$$f'(x) = \frac{-x^2+2xb+a}{(x^2+a)^2}$$

ここで，$f'(x)=0$ の解を $p$，$q$ $(p<q)$ とする。$x<p$ では $f'(x)<0$，$p<x<q$ では $f'(x)>0$，$q<x$ では $f'(x)<0$ である。また $x\to-\infty$ のとき $f(x)\to 0$，$x\to\infty$ のとき $f(x)\to 0$ である。これらの事実より，$f(p)$ が最小値，$f(q)$ が最大値である。

以上より，次の 4 つの変数と 4 つの式からなる連立方程式がたてられる。

$$\begin{aligned} -p^2+2bp+a &= 0 \\ -q^2+2bq+a &= 0 \\ \frac{p+b}{p^2+a} &= -\frac{1}{4} \\ \frac{q+b}{q^2+a} &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

この連立方程式を解くと，$b=-2$，$a=12$ となる。

**問 3.** （解答例）

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \{\ \text{導関数の定義より}\ \} \\
&\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \{\ \text{分子に } -f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)\ (=0)\ \text{を挿入}\ \} \\
&\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \{\ \text{極限の和の分解}\ \} \\
&\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \{\ \text{極限の積の分解，定数 } f(x) \text{ を極限の外に出す}\ \} \\
&\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \{\ \lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)\text{，導関数の定義より}\ \} \\
&\quad f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$