$\boxed{\text{I}}$ 次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) 和 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{2018\cdot 2019}$ を計算せよ。

(2) x^6-64 を係数が実数の範囲で因数分解せよ。

(3) n を正の整数とする。互いに区別のつかない n 個のボールを，4 つの箱 A, B, C, D に分けて入れる方法は何通りあるか。ただし，ボールが 1 つも入らない箱があってもよいものとする。

(4) n を正の整数とし，さいころを n 回投げる。n 回目にはじめて 5 以上の目が出る確率を求めよ。

(5) $x=1+i$ は方程式 $x^3-5x^2+8x-6=0$ の 1 つの解である。この方程式の他の解をすべて求めよ。

(6) $\tan^2 15^\circ$ の値を求めよ。

(7) xy 平面上の放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}, \mathrm{B}$ があり, 三角形 OAB は 1 辺の長さが a の正三角形である。a の値を求めよ。

(8) 曲線 $y=|x^2-4|\ (0 \leqq x \leqq 3)$ と x 軸, y 軸, 直線 $x=3$ で囲まれる 2 つの図形の面積の和を求めよ。

(9) 2 つの空間ベクトル $\overrightarrow{a}=(1,2,2)$, $\overrightarrow{b}=(3,4,5)$ の両方に垂直で，大きさが 1 である空間ベクトルを 1 つ求めよ。

(10) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3\ (n \geqq 1)$ で定まる数列の一般項 a_n を求めよ。

(11) 3 次の項の係数が 1 の 3 次関数 $f(x)$ がある。$y=f(x)$ のグラフは原点 $(0,0)$ を通り，点 $(1,1)$ において直線 $y=1$ と接する。$f(x)$ を求めよ。

(12) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^k$ を 10 で割った余りを求めよ。

II a, b は実数の定数とする。x についての方程式

$$4^x + a \cdot 2^{x+1} + 4a^2 - b = 0 \qquad (*)$$

を考える。次の各問に答えよ。

(1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつとき，a, b の満たす関係式を求めよ。

(2) $(*)$ が $x = \log_2 3$ を解にもつとき，a, b の満たす関係式を求めよ。

(3) $(*)$ が $x = 1, \log_2 3$ を解にもつとき，a, b の値を求めよ。

(4) t についての 2 次方程式

$$t^2 + 2at + 4a^2 - b = 0 \qquad (**)$$

が相異なる 2 つの実数解をもつための a, b の条件を求めよ。

(5) x についての方程式 $(*)$ が相異なる 2 つの実数解をもつための a, b の条件を求めよ。

III 素数は無限に存在することを以下のように 2 部に分けて証明した。これを読み，後の問に答えよ。

第 1 部 自然数（正の整数）全体の集合を A で表す。A の部分集合 B が有限個の要素からなるとき，B の要素の個数を $n(B)$ で表す。A の部分集合 B, C が有限個の要素からなるとき

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$$

であるから，とくに

$$n(B \cup C) \leqq n(B) + n(C) \quad \cdots ①$$

が成り立つ。同様に，A の部分集合 $B_1, B_2, \ldots, B_r$ が有限個の要素からなるとき

$$n(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r) \leqq n(B_1) + n(B_2) + \cdots + n(B_r) \quad \cdots ②$$

が成り立つことがいえる。

第 2 部 第 1 部を踏まえ，素数は無限に存在することを背理法によって証明する。

素数が有限個しかないと仮定し，それらを小さい順に $p_1, p_2, \ldots, p_r$（r は素数の個数）とする。例えば $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ であり，また p_r は（存在していると仮定している）最大の素数である。
(ア) $i = 1, 2, \ldots, r$ に対し，p_i^2 の倍数である自然数全体の集合を S_i とする。$S_i \subset A$ である。$c = p_1 p_2 \cdots p_r$ とおき，c 以下の自然数全体の集合を T とする。$T \subset A$ である。

$n > c$ をみたす任意の自然数 n に対して, n が p_i^2 で割り切れるような番号 i がとれる。なぜなら，n の素因数分解は

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} \quad (e_1, e_2, \ldots, e_r \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

の形になるが，どの i についても n が p_i^2 で割り切れないと仮定すると，$e_1, e_2, \ldots, e_r$ はすべて 1 以下となるので $n \leqq p_1 p_2 \cdots p_r$ が成り立つことになり，(イ) 矛盾が生じるからである。 よって $n > c$ のとき，$n \in S_i$ となる番号 i がとれる。

A の部分集合 B と自然数 k に対して，B の要素のうち k 以下であるもの全体を $B^{(k)}$ で表す（例えば $A^{(k)} = \{1, 2, \ldots, k\}$ である）。すると k 以下の自然数 n に対して，$n \leqq c$ なら $n \in T^{(k)}$, $n > c$ ならある番号 i について $n \in S_i^{(k)}$ である。

よって

$$A^{(k)} = S_1^{(k)} \cup S_2^{(k)} \cup \cdots \cup S_r^{(k)} \cup T^{(k)}$$

が成り立つ。すると ② より, 任意の自然数 k に対して

$$k = n(A^{(k)}) \leqq \underbrace{\sum_{i=1}^{r} n\left(S_i^{(k)}\right) + n\left(T^{(k)}\right) \leqq \sum_{i=1}^{r} \frac{k}{p_i^2} + c}_{(\text{ウ})} = k \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i^2} + c$$

すなわち

$$1 \leqq \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i^2} + \frac{c}{k} \quad \cdots ③$$

が成り立つ。しかし，$p_i < d \ (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす自然数 d をとると

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i^2} < \sum_{j=2}^{d} \frac{1}{j^2} < \sum_{j=2}^{d} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=2}^{d} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) = 1 - \frac{1}{d}$$

なので，不等式 ③ は $_{(\text{エ})}$ $\underline{k > cd \text{ のとき成り立たず，}}$ 矛盾が生じる。

[設問]

(1) 不等式 ① に関して次の問に答えよ。20 以下の自然数のうち，2 の倍数からなる集合を P, 3 の倍数からなる集合を Q とする。$n(P) + n(Q)$ と $n(P \cup Q)$ をそれぞれ求め，どちらが大きいか述べよ。

(2) (1) に加えて，20 以下の自然数のうち，5 の倍数からなる集合を R とする。$n(P) + n(Q) + n(R)$ と $n(P \cup Q \cup R)$ をそれぞれ求め，どちらが大きいか述べよ。

(3) 不等式 ② について，$r = 3$ のときは ① を 2 回使って

$$\begin{aligned} n(B_1 \cup B_2 \cup B_3) &= n\Big((B_1 \cup B_2) \cup B_3\Big) \\ &\leqq n(B_1 \cup B_2) + n(B_3) \\ &\leqq n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

と導かれる。ここで，図 1 の斜線部（$B_1 \cup B_2 \cup B_3$）は図 2 の斜線部（$B_1 \cup B_2$）と図 3 の斜線部（B_3）の和集合であることを使った。

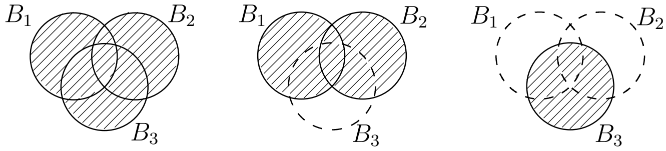

図 1：$B_1 \cup B_2 \cup B_3$　図 2：$B_1 \cup B_2$　図 3：B_3

④ を導いたのと同様の考え方を用いて，② を $r = 4$ の場合に示せ。

(4) 下線部（ア）に関して，S_1 の要素のうち，50 以下のものをすべて挙げると

$$4,\quad 8,\quad 12,\quad 16,\quad 20,\quad 24,\quad 28,\quad 32,\quad 36,\quad 40,\quad 44,\quad 48$$

である。第 2 部で導入した記号を用いてかくと

$$S_1^{(50)} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$$

である。S_2 の要素のうち，50 以下のもの（つまり $S_2^{(50)}$ の要素）をすべて挙げよ。

(5) 下線部（ア）に関して，S_3 の要素のうち，50 以下のもの（つまり $S_3^{(50)}$ の要素）をすべて挙げよ。

(6) 下線部（イ）の理由をわかりやすく説明せよ。

(7) 下線部（ウ）について，$n\left(S_i^{(k)}\right) = a$ とおく。$S_i^{(k)}$ の要素のうち，最大のものを a, p_i を用いて表せ。さらに，$n\left(S_i^{(k)}\right) \leqq \dfrac{k}{p_i^2}$ となる理由をわかりやすく説明せよ。

(8) 下線部（エ）の理由をわかりやすく説明せよ。