Ⅰ　図1のように，摩擦のない水平面 **BC** が，点 **O** を中心とした半径 $\boldsymbol{R}$ の半円筒型の摩擦のない曲面 **BD** と点 **B** で滑らかに接続されている。$\angle$**AOB** $= \theta_0$ となる半円筒曲面上の点 **A** には質量 m の小球 **P** を置き，水平面上の点 **C** には質量 $\boldsymbol{M}$ の小球 **Q** を置く。いま，初速0で小球 **P** を半円筒曲面に沿って滑り落とすと，図2のように，点 **B** を通過した直後に小球 **P** の速さは v_0 となった。ただし，θ_0 は 90° 以下である。また，重力加速度の大きさを g とする。解答用紙に解法欄がある場合には解答に至るまでの導出過程も記述せよ。

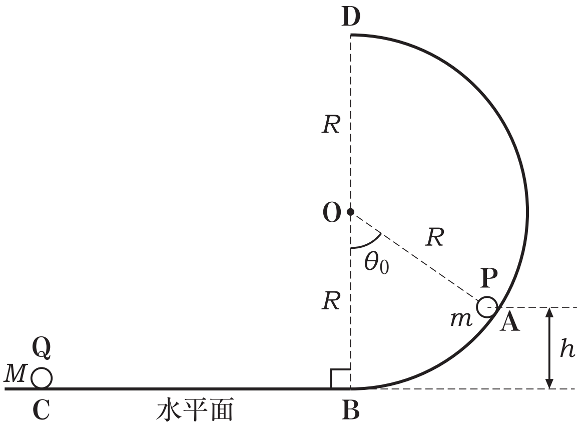

図1

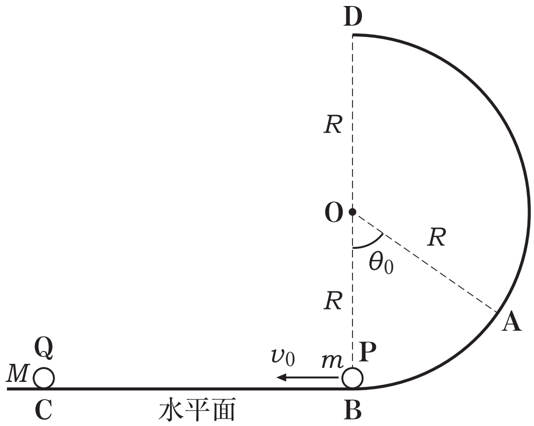

図2

問1　水平面 **BC** から測った点 **A** の高さ h を R，θ_0 を用いて表せ。

問2　点 **B** を通過した直後の小球 **P** の速さ v_0 を g，R，θ_0 を用いて表せ。

小球Pが点Bを通過した後，図3に示すように，点Cに置かれた小球Qが小球Pと同じ速さ v_0 で右向きに等速度運動を始めた。その後，小球Pと小球Qは水平面BC上で弾性衝突して，図4のように，小球Pは右向きに速さ v_1 で運動し，小球Qは速さ0となって停止した。

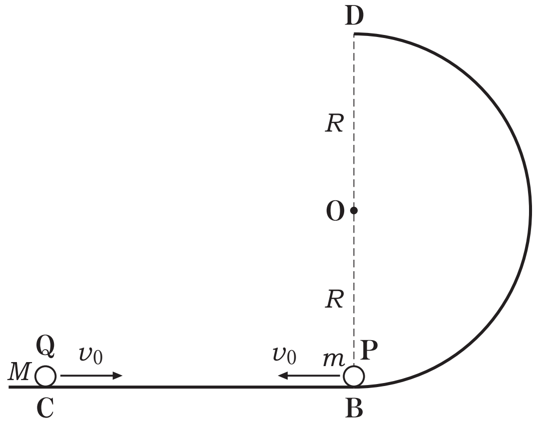

図3

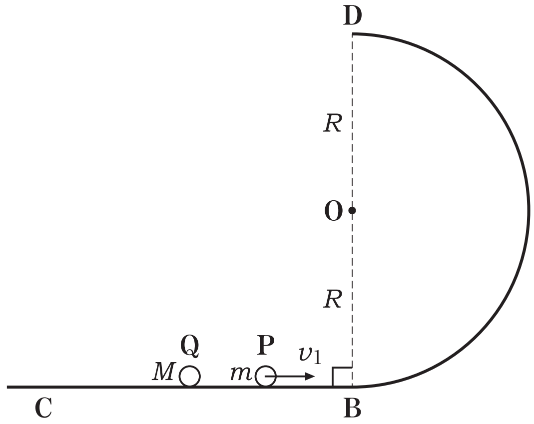

図4

問3　衝突前後における運動量保存則と力学的エネルギー保存則の式を M, m, v_0, v_1 を用いて表せ。

問4　$\dfrac{v_1}{v_0}$ と $\dfrac{M}{m}$ を数値で答えよ。

その後，図５に示すように，小球 **P** は速さ v_1 で点 **B** を通過し，半円筒曲面に沿って円運動しながら曲面を滑り上がり，図６に示すように，半円筒曲面から離れることなく点 **D** に到達した。点 **D** に到達したとき，小球 **P** の速さは v_2 であった。

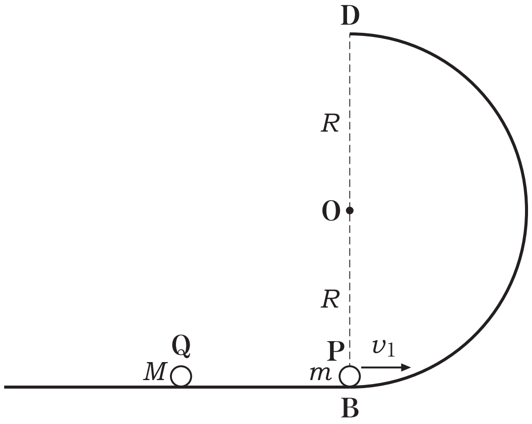

図５

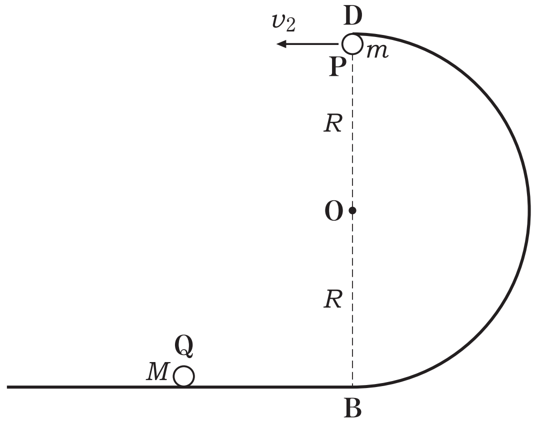

図６

問５　小球 **P** には，円運動に伴う遠心力，半円筒曲面からの垂直抗力，重力が作用する。これらの力のつりあいの関係を利用して，点 **D** における半円筒曲面からの垂直抗力の大きさ N を v_2，g，m，R を用いて表せ。

問６　速さ v_2 を v_1，g，R を用いて表せ。

問７　小球 **P** は半円筒曲面から離れることなく点 **D** に到達しているため，点 **D** における半円筒曲面からの垂直抗力の大きさ N は０以上である。問５，問６の結果を用いて，小球 **P** が半円筒曲面から離れることなく点 **D** に到達するために必要となる速さ v_1 の条件を g，R を用いて表せ。

問８　問１～問７の結果を用いて，小球 **P** が半円筒曲面から離れることなく点 **D** に到達するために必要となる $\cos\theta_0$ の条件を求めよ。

Ⅱ　図7のように非常に長い平行な導体（レール）を水平に，間隔 L となるように設置した。導体の左端に抵抗値 R_0 の抵抗 $\mathbf{R}_0$ をつなぎ，レール上にはレールと垂直になるように導体の棒 **Y** を置き，レールの面に磁束密度の大きさ B の一様な磁場を鉛直下向きにかけた場合を考える。ただし，レールと棒 **Y** は常に垂直で両者の間に摩擦はなく，導体の電気抵抗は無視できるものとする。解答用紙に解法欄がある場合には解答に至るまでの導出過程も記述せよ。

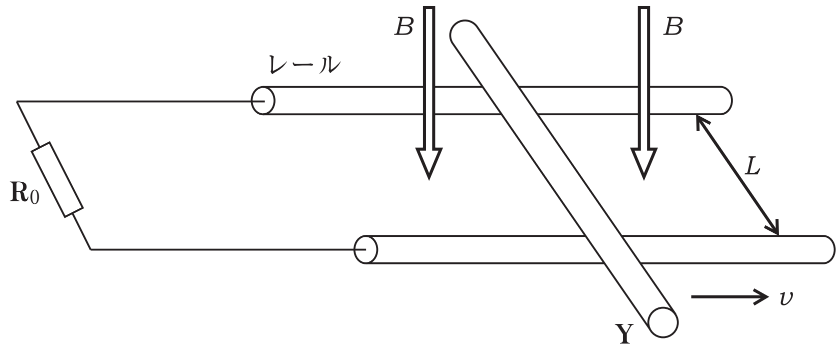

図7

問1　棒 **Y** を一定の速さ v で右側に動かした場合，抵抗 $\mathbf{R}_0$ に流れる電流の大きさ I を求めよ。

問2　棒 **Y** を一定の速さ v で動かし続けるとき，棒 **Y** に与える力の大きさ F と，大きさ F の力が棒 **Y** に単位時間あたりにする仕事 W を v, L, B, R_0 を用いて表せ。

問3　抵抗 $\mathbf{R}_0$ の単位時間あたりの消費電力 P を v, L, B, R_0 を用いて表せ。また，抵抗 $\mathbf{R}_0$ で発生した熱で質量 M, 比熱 C の水を温度 ΔT 上げるのに要する時間 t を C, M, ΔT, R_0, v, L, B を用いて表せ。ただし，抵抗 $\mathbf{R}_0$ で発生する熱はすべて水を温めるのに使われるものとする。

棒 **Y** を一定の速さ v で右側に動かしているときの消費電力を制御するため，図 8 のように抵抗 $\mathbf{R}_0$ を可変抵抗に変え，さらに直列に抵抗値 r の抵抗 **r** を入れた。

問 4　可変抵抗の抵抗値を R としたとき可変抵抗の消費電力 $Q(R)$ を求めよ。

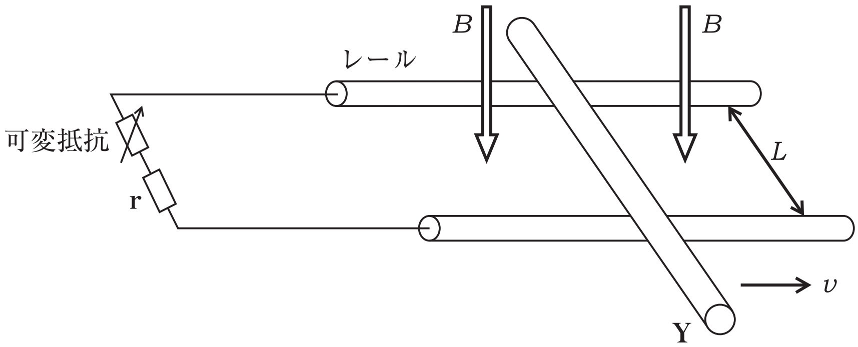

図 8

問 5　可変抵抗の抵抗値 R だけを変化させたときの，可変抵抗の消費電力の最大値 $Q_{\max}$ と，そのときの可変抵抗の抵抗値 $R_{\max}$ を求めよ。

図7の配置から，一様な磁場の向きを傾けて，レール面の垂線と角度 θ をなすようにした図9の場合を考える。さらに，棒 **Y** を角周波数 ω，最大の速さ v_0 の時間 t とともに変化する速度 $v(t) = v_0 \sin\omega t$ で左右に動かした。ただし，レールに沿って水平右向きを速度の正の向きとする。

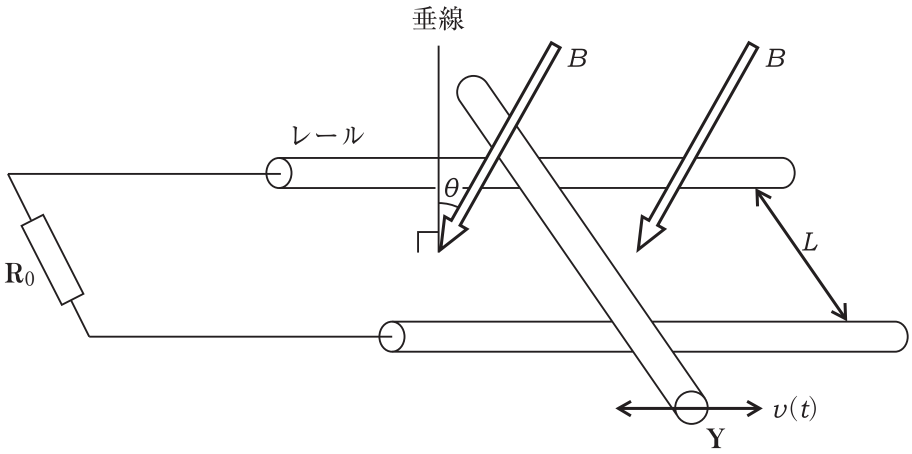

図9

問6　このとき，抵抗 $\mathbf{R}_0$ の消費電力 $S(t)$ を時間 t の関数として求めよ。

問7　問6のとき，抵抗 $\mathbf{R}_0$ の各瞬間における消費電力 $S(t)$ の時間変化を1周期（$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$）の範囲で解答欄のグラフに描き込み，消費電力の最大値 S_{peak} と1周期の平均値 S_{ave} を求めよ。

Ⅲ　波に関する以下の問いに答えよ。解答用紙に解法欄がある場合には解答に至るまでの導出過程も記述せよ。

陸上に静止した観測者が，十分離れた水面上の船を観察している。水面には波長 L，速さ v の平面波が観測者に向かって進行している。

問１　最初，船は停泊しており，観測者は，静止した船に波長 L の波が時間 t_1 の間に n 回到達することを観測した。波の速さ v を，L，n，t_1 を用いて表せ。

問２　次に，船は観測者から見て速さ v で観測者から遠ざかる向きに動き出した。ただし，船の進む向きは図 10 に示すように，波の進行方向と 45° の角度をなす向きであった。船が波の山から次の山までを移動するときにかかる時間 t_2 を，L と v を用いて表せ。

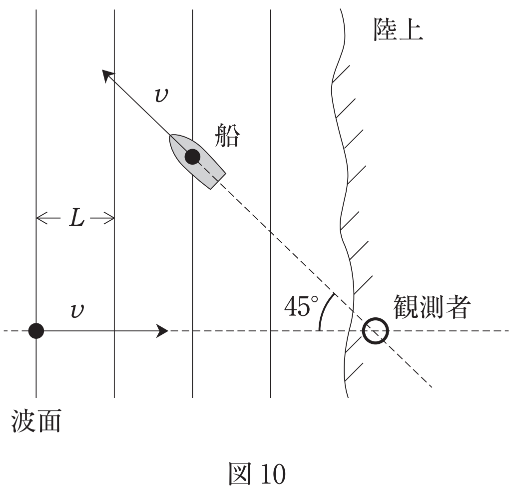

図 10

図 11 のように，全長 L，線密度（単位長さあたりの質量）ρ のロープを水平に置かれた滑らかな机の上に置いた。ロープの一方の端 **A** は机の上の振動子に接続され，他端は，机の端の小さな滑車 **B** を介して垂らされている。振動子の振動方向は，ロープと垂直で水平方向となるよう配置した。振動子の振動数を 0 から徐々に上げたところ振動数 f_0 のときにはじめて，机の上のロープには，振動子との接続点 **A** と滑車 **B** との接点を固定端として，机の上面と平行に振動する定常波が発生した。なお，重力加速度の大きさを g，机の上のロープの長さを $L_0\,(< L)$ とし，ロープの振動の振幅は，机の上にあるロープの長さ L_0 および垂らしたロープの長さ $L - L_0$ と比較して十分に小さいものとする。また，机の上のロープは机と常に接しており離れることはないものとする。

問 3　机の上のロープには，垂らしたロープの重さにより張力がはたらいている。この張力の大きさ T を，ρ，L，L_0，g を用いて表せ。

問 4　このとき，机の上で振動するロープの基本振動数 f_0 を，L，L_0，g を用いて表せ。ただし，線密度 ρ，張力の大きさ T のロープに生じる波の速さ v は $v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ で与えられるものとする。

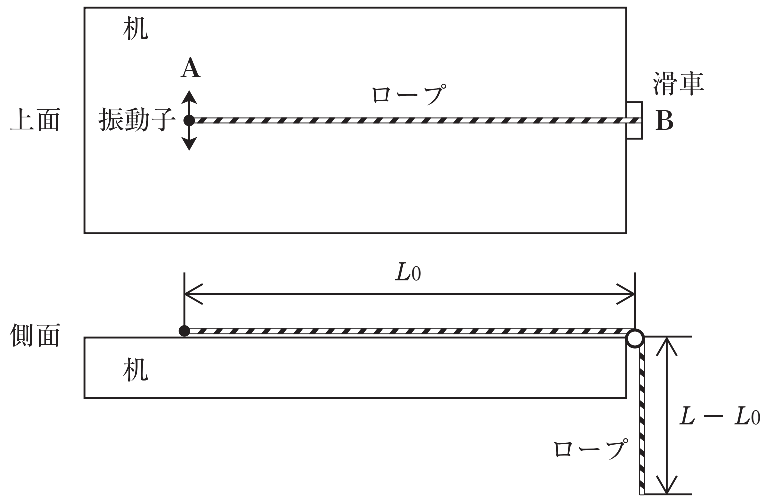

図 11

問５　片側の端が閉じた長さ L の閉管 A に対し，音源を開口部に近づけておき，音の振動数を０から徐々に上げていくと，ある振動数ではじめて共鳴した。音速を v とするとき，このときの振動数 f_{A0} を，L，v を用いて表せ。ただし，開口端補正は無視する。

問６　両側の端が開いた長さ L の開管 B に対し，図 12 のように開管 B を水面から十分離した状態で音源を開口部に近づけておき，０から徐々に振動数を上げていくと基本振動数 f_{B0} で共鳴した。次に，音源が発する音の振動数 f_{B0} は変えずに，この音源と開管の間隔を保ったまま開管 B を徐々に水に沈めていくと，図 13 に示すように，長さ L_1 だけ沈めたときに，はじめて共鳴した。長さ L_1 を L を用いて表せ。ただし，開口端補正を開口部から ΔL の長さとし，音速は変わらず，開管 B の内部の水面の高さは外部の水面と常に同じ高さで固定端と見なせるものとする。

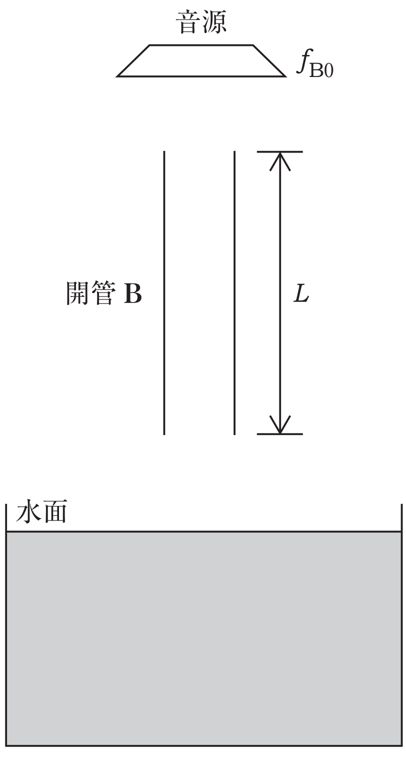

図 12

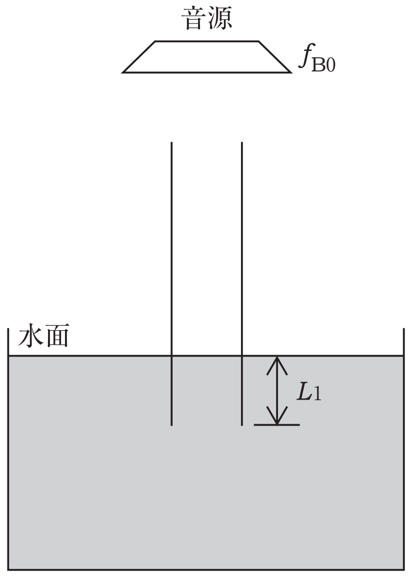

図 13