I

(1) -49

(2) $-1 < a < 0,\ 0 < a < 1$

(3) -7

(4) $\sqrt{17} - 3$

(5) $8t^4 - 8t^2 + 1$

(6) $\dfrac{-3 + \sqrt{37}}{2} \leqq x < 2$

(7) $-4 < a < 28$

(8) $\dfrac{11}{6}$

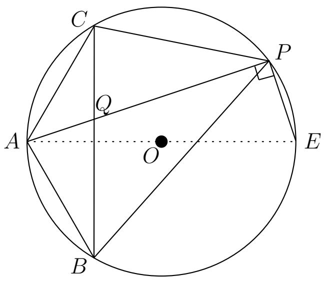
(9) 2688 通り

(10) 108 通り

(11) $n = 3, 4$

(12) $a_n = 3 \cdot 2^{n-2} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$

II (1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-m)\overrightarrow{b} + m\overrightarrow{c}$, $|\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1$ である。また $\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ はともに正三角形なので $\angle\mathrm{BAC} = 120^\circ$ であるから，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} = 1\cdot 1\cdot\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$ が成り立つ。



(2) (1) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{AQ}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \\
&= \{(1-m)\overrightarrow{b} + m\overrightarrow{c}\}\cdot\{(1-m)\overrightarrow{b} + m\overrightarrow{c}\} \\
&= (1-m)^2|\overrightarrow{b}|^2 + 2m(1-m)\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} + m^2|\overrightarrow{c}|^2 \\
&= (1-m)^2 - m(1-m) + m^2 \\
&= 3m^2 - 3m + 1
\end{aligned}$$

である。

(3) 四角形 ABOC は 1 辺の長さが 1 のひし形であるから $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ である。よって $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} = 2(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ であるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \{(1-m)\overrightarrow{b} + m\overrightarrow{c}\}\cdot 2(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \\
&= 2\{(1-m)|\overrightarrow{b}|^2 + \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} + m|\overrightarrow{c}|^2\} \\
&= 2\left(1 - m - \frac{1}{2} + m\right) = 1
\end{aligned}$$

が成り立つ。

(4) P は直線 AQ 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$（$k$ は実数）とかける。また AE は円の直径だから $\angle\mathrm{APE} = 90^\circ$ である。よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}} = 0$ が成り立つので $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}} = 0$ である。$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = k\overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot(k\overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}}) = k|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} = k(3m^2 - 3m + 1) - 1$$

が成り立つ。よって $k(3m^2 - 3m + 1) - 1 = 0$ である。ここで $3m^2 - 3m + 1 = \mathrm{AQ}^2 > 0$ なので $k = \dfrac{1}{3m^2 - 3m + 1}$ が得られる。

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{1-m}{3m^2 - 3m + 1}\overrightarrow{b} + \dfrac{m}{3m^2 - 3m + 1}\overrightarrow{c}$ である。

III (1) $m = 1$ のとき $n = 2$ である。このとき

$$A - G = \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}}{2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geqq 0$$

より $A \geqq G$ が成り立つ。

(2) $a_{n'+1}, a_{n'+2}, \ldots, a_n$ は $n - n' = n' = 2^k$ 個の数からなるので，A_2, G_2 はそれぞれ 2^k 個の正の数の相加平均，相乗平均であるから。

(3) $2^9 = 512, 2^{10} = 1024$ より，$n = 1000$ のとき $m = 10$ である。

(4) A', G' はそれぞれ 2^m 個の正の数の相加平均，相乗平均であるから。

(5) 条件より $\dfrac{h_1 + h_2 + \cdots + h_{40}}{40} = h_0$ だから $h_1 + h_2 + \cdots + h_{40} = 40h_0$ である。よって $h_1 + h_2 + \cdots + h_{40} + h_{41} + h_{42} + h_{43} = 40h_0 + 3h_0 = 43h_0$ であるから，43 人の平均身長について

$$\overline{h} = \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_{40} + h_{41} + h_{42} + h_{43}}{43} = h_0$$

が成り立つ。つまり，43 人の平均身長は元の 40 人の平均身長に等しい。

(6) $A^{2^m} \geqq G^n A^l$ の両辺を $A^l > 0$ で割って $A^{2^m - l} \geqq G^n$，すなわち $A^n \geqq G^n$ が得られる。$A > 0, G > 0$ であるから，この不等式の両辺の n 乗根をとって $A \geqq G$ が得られる。

(7) $P_1, P_2, P_4, P_8, P_{16}, P_{32}, P_{64}, P_{128}, P_{256}, P_{512}, P_{1024}, P_{1000}$