

高知工科大学情報学群 平成32年度 AO 入試
学群適性検査 数学② 参考問題

A 区分: 問 1・2 に答えなさい。

B 区分: 問 1～5 に答えなさい。

ある美術館の展示室には、図 1 のように、格子状に縦横 4 本ずつの通路がある。縦の通路を列、横の通路を行と呼ぶことにし、列には左から右に、行には上から下に 1 から順に番号を付けて呼ぶことにする。例えば、左端の列は列 1、上から 2 番目の行は行 2 と呼ぶ。

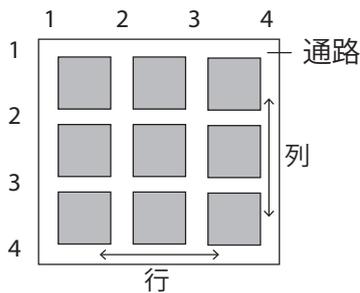


図 1: 展示室の見取図

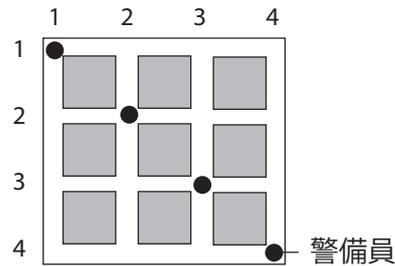


図 2: 警備員の配置例 1

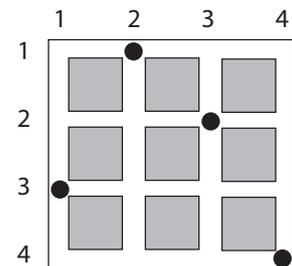


図 3: 警備員の配置例 2

この展示室全体を監視するために、どの通路でも少なくとも 1 人が監視するように警備員を配置する。ただし、警備員は行と列の交差点で動かずに監視することにする。列も行も 4 本ずつあるので警備員は少なくとも 4 人必要で、4 人で展示室全体を監視するには、それぞれの行と列でちょうど 1 人の警備員が監視しなければならない。図 2 や図 3 はそのような警備員の配置の例である。

問 1. 警備員 4 人で展示室全体を監視できる配置が何通りあるかを考える。空欄 ～ に当てはまる数を答えなさい。

警備員を左の列から右の列に向かって順に配置する。列 1 に 1 人目の警備員を配置する。1 人目の警備員を配置する交差点は 通り考えられる。

列 2 に 2 人目の警備員を配置する。2 人目の警備員は 1 人目とは違う行に配置するので、1 人目を配置した後では、2 人目の警備員の配置は 通り考えられる。したがって、1 人目と 2 人目の警備員を配置する交差点の組み合わせは 通りある。

警備員 4 人で展示室全体を監視できる配置は 通りある。

問2. 図4に示すような縦横の通路が6本ずつある展示室を考える。縦横の通路が4本ずつの展示室と同様に、横と縦の通路はそれぞれ行と列と呼び、それぞれ上からと左から番号を付けて呼ぶことにする。さらに、列 x と行 y の交差点を (x, y) で表すことにする。

この展示室では、図4の×印で示す交差点 $(6, 6)$ に人気の展示物があり、混雑が予想される。そのため、交差点 $(6, 6)$ には警備員を配置しないことにする。この展示室全体を6人で監視できる配置が何通りあるかを考える。空欄 オ ~ コ にあてはまる数を答えなさい。

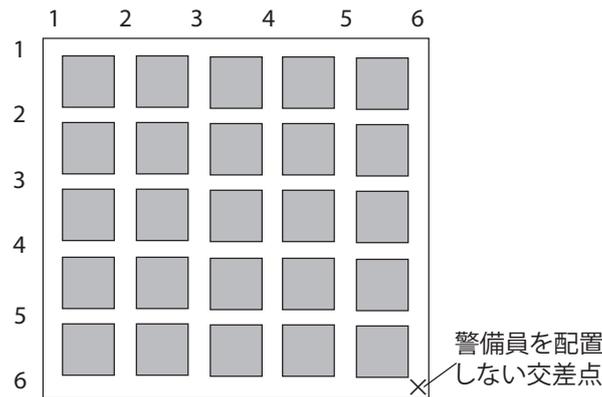


図4: 人気の展示物がある展示室

警備員を右の列から左の列に向かって順に配置する。列6に1人目の警備員を配置する。交差点 $(6, 6)$ には警備員を配置しないので、1人目の警備員を配置する交差点は オ 通り考えられる。

列5に2人目の警備員を配置する。2人目の警備員は1人目とは違う行に配置するので、1人目を配置した後では、2人目の警備員を配置する交差点は カ 通り考えられる。したがって、1人目と2人目の警備員の配置は キ 通りある。

このように順に考えると、警備員6人で展示室全体を監視できる配置は ク 通りある。

この展示室の警備員の配置が何通りあるかは、次のような考え方で求めることができる。仮に交差点 $(6, 6)$ に警備員を配置してもよいとする。そのとき、警備員6人で展示室全体を監視できる配置は ケ 通りある。しかし、この中には、交差点 $(6, 6)$ に警備員を配置するような場合も含まれている。そのような場合は コ 通りある。したがって、交差点 $(6, 6)$ に警備員がない配置は、

$$\text{ケ} - \text{コ} = \text{ク}$$

より、 ク 通りある。

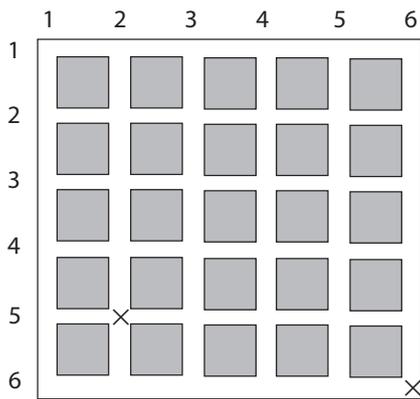


図 5: 人気の展示物が 2 つある展示室

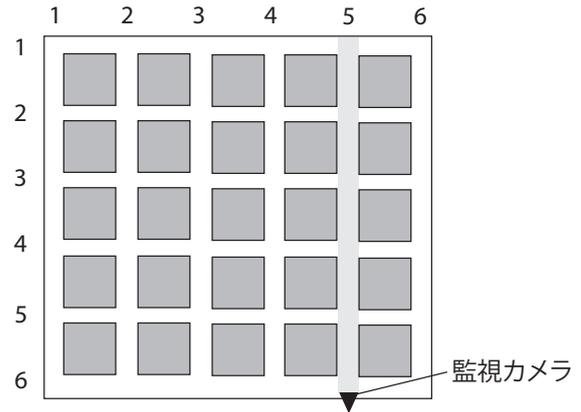


図 6: 監視カメラがある展示室

問 3. 図 5 のような、縦横の通路が 6 本ずつあり、交差点 (2, 5) と交差点 (6, 6) に警備員を配置できないような展示室を考える。警備員 6 人でこの展示室全体を監視できる配置は何通りあるか答えなさい。

問 4. 図 6 のような、縦横の通路が 6 本ずつある展示室を考える。この展示室には監視カメラがあり、列 5 には警備員を配置してもしなくてもよい。それでも行が 6 本あるので、展示室全体を監視するには警備員が 6 人必要になる。警備員 6 人でこの展示室全体を監視できる配置は何通りあるか答えなさい。

問 5. 縦横の通路が N 本ずつあり、部屋の左上から右下への対角線上の交差点 (交差点 (i, i) , ただし $i = 1, 2, \dots, N$) のいずれにも警備員を配置できない展示室を考える。ただし、 $N \geq 2$ とする。警備員 N 人でこの展示室全体を監視できる配置が何通りあるかを求めたい。このような配置が何通りあるかを求める手順、または、このような配置が何通りあるかを表す式を N を使って示しなさい。さらに、その手順や式通りに計算して、 $N = 6$ の場合に展示室全体を監視できる配置が何通りあるかを求めなさい。

高知工科大学情報学群 平成32年度 AO 入試
学群適性検査 数学② 参考問題 正解

問1. ア 4 イ 3 ウ 12 エ 24

問2. オ 5 カ 5 キ 25 ク 600 ケ 720 コ 120

問3. 504通り

問4. 2520通り

問5. (解答例)

縦横の通路が k 本ずつあり、各行、各列に1つずつ警備員が配置できない交差点がある展示室を考える。この展示室全体を警備員 k 人で監視できる警備員の配置が a_k 通りあるとする。問題の展示室は縦横の通路が N 本ずつあり、各行、各列に1つずつ警備員が配置できない交差点がある。したがって、 a_N を求めれば、それが答えになっている。

次に、縦横の通路が k 本ずつあり、1つの行と1つの列には、どの交差点にも警備員を配置でき、それ以外の行と列には1つずつ警備員が配置できない交差点がある展示室を考える。この展示室全体を警備員 k 人で監視できる警備員の配置が b_k 通りあるとする。

このとき、数列 $\{a_k\}$ と数列 $\{b_k\}$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 \\ a_k &= (k-1)b_{k-1} \quad (k \geq 3) \\ b_2 &= 1 \\ b_k &= a_{k-1} + (k-1)b_{k-1} \quad (k \geq 3) \end{aligned}$$

上の数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ を $k=2$ から $k=N$ まで順に計算する。

($N=6$ のとき)

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 & b_2 &= 1 \\ a_3 &= 2 \cdot (1+0) = 2 & b_3 &= 1 + (3-1) \cdot 1 = 3 \\ a_4 &= 3 \cdot (2+1) = 9 & b_4 &= 2 + (4-1) \cdot 3 = 11 \\ a_5 &= 4 \cdot (9+2) = 44 & b_5 &= 9 + (5-1) \cdot 11 = 53 \\ a_6 &= 5 \cdot (44+9) = 265 \end{aligned}$$

したがって、265通り。