I 次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) $302011 \cdot 302025 - 302018^2$ を求めよ。

(2) 方程式 $ax^2 - 2x + a = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 整数を係数とするある 1 次多項式で，2 つの多項式

$$P(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 3, \quad Q(x) = x^2 + 5x - 1$$

を割ったときの余りが等しくなったとする。このときの余りを求めよ。

(4) 円 $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ と点 $\mathrm{A}(5, 3)$ との距離 PA の最小値を求めよ。

(5) $\cos\theta = t$ とおくとき，$\cos 4\theta$ を t の多項式で表せ。

(6) 不等式 $\log_3(4 - x^2) - \log_3(x - 1) \leqq 1$ を解け。

(7) 方程式 $x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = a$ が相異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(8) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2 - x|\, dx$ の値を求めよ。

(9) 9 つの数 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ から異なる 4 つの数をとって 4 桁の数をつくるとき，何通りの数ができるか。

(10) 男子 2 人，女子 3 人が横一列に並ぶとき，女子が 2 人以上続いて並ぶような並び方は何通りあるか。

(11) n を自然数とする。n についての方程式 $4^n - (3n + 12)2^n + 8(3n + 4) = 0$ の解を求めよ。

(12) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + 2^n\ (n \geqq 1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

II 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する四角形 ABPC があり，次が成り立つとする。

(i) 三角形 ABC は $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 1$ を満たす二等辺三角形である。

(ii) AP と BC の交点 Q は線分 BC を $m : 1 - m$ $(0 < m < 1)$ に内分する。

(iii) 直線 AO と円 O の交点のうち，A と異なるものを E とする。E と P は異なる点である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{c}$ とおく。次の各問に答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$ を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, m で表せ。

(2) AQ^2 を m で表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}} = 1$ であることを示せ。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, m で表せ。

$\boxed{\text{III}}$ n を 2 以上の自然数とする。n 個の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し，これらの相加平均と相乗平均とはそれぞれ

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

のことである。これらについて不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \qquad (\star)$$

が成り立つ。このことの証明を読み，後の各問に答えよ。

[証明] (Step 1) $n = 2^m$ $(m \geqq 1)$ の場合
m に関する数学的帰納法で示す。まず $_{(ア)}$ $\underline{m = 1 \text{ のとき題意が成り立つ。}}$
次に, $m = k$ $(k \geqq 1)$ のとき $(\star)$ が成り立つとし, $m = k + 1$ の場合を考える。このとき $n' = 2^k$ とおくと $n = 2^{k+1} = 2n'$ である。

$$A_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n'}}{n'}, \quad A_2 = \frac{a_{n'+1} + a_{n'+2} + \cdots + a_n}{n'},$$
$$G_1 = \sqrt[n']{a_1 a_2 \cdots a_{n'}}, \quad G_2 = \sqrt[n']{a_{n'+1} a_{n'+2} \cdots a_n}$$

とおくと, 数学的帰納法の仮定より

$$A_1 \geqq G_1, \quad {}_{(イ)}\ \underline{A_2 \geqq G_2} \qquad (\star\star)$$

が成り立つ。また

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad G = \sqrt{G_1 G_2}$$

である。したがって，$m = 1$ の場合の結果と $(\star\star)$ から

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} \geqq \sqrt{A_1 A_2} \geqq \sqrt{G_1 G_2} = G$$

が成り立つ。以上より，$n = 2^m$ $(m \geqq 1)$ に対しては $(\star)$ は成り立つ。

(Step 2) 一般の場合
$_{(ウ)}$ $\underline{2^{m-1} < n \leqq 2^m \text{ となる自然数 } m \text{ がただ1つ存在する。}}$ よって，このとき $n = 2^m - l$ $(0 \leqq l < 2^{m-1})$ とかける。$l = 0$ の場合は Step 1 で示されているから，$l \geqq 1$ としてよい。元の n 個の数に l 個の A を加え, $n + l = 2^m$ 個の数

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \underbrace{A, \quad A, \quad \ldots, A}_{l \text{ 個}}$$

を考える。これらの相加平均と相乗平均をそれぞれ A', G' とおくと,
$_{(エ)}$ $\underline{\text{Step 1 より } A' \geqq G' \text{ である。}}$

一方

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + lA = nA + lA = (n+l)A = 2^m A$$

より

$$\text{(オ)}\ \underline{A' = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + lA}{2^m} = A}$$

が成り立つ。また $a_1 a_2 \cdots a_n = G^n$ より

$$G' = \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_n A^l} = \sqrt[2^m]{G^n A^l}$$

が成り立つ。よって

$$A = A' \geqq G' = \sqrt[2^m]{G^n A^l}$$

であるから

$$A^{2^m} \geqq G^n A^l$$

が得られる。(カ) したがって $A \geqq G$ が成り立つ。

[設問]

(1) 下線部（ア）について，その理由を説明せよ。

(2) 下線部（イ）について，なぜここで数学的帰納法の仮定を用いることができるのかを説明せよ。

(3) 下線部（ウ）について，$n = 1000$ の場合に m を求めよ。

(4) 下線部（エ）について，なぜ Step 1 の結果を用いることができるのかを説明せよ。

(5) 下線部（オ）で用いられている考え方を踏まえて，次の問に答えよ。

ある高等学校の 40 人からなるクラスの生徒の身長 $h_1, h_2, \ldots, h_{40}$ の平均値は $h_0 = 160$ センチメートルだった。このクラスに，3 人の転校生が入った。3 人の身長 h_{41}, h_{42}, h_{43} はいずれも 160 センチメートルだった。このとき，43 人の身長の平均値 $\overline{h}$ に関して，どのようなことが言えるか。数式を用いた詳しい理由も記せ。

(6) 下線部（カ）について，その理由を説明せよ。

(7) 不等式 $(\star)$ が成り立つという命題を P_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ とする。上の [証明] で用いられた考え方に基づけば，P_1 が成り立つことを前提として P_{1000} が成り立つことを示すには，どのような手順を踏めばよいか。$P_1, P_2, P_3, \ldots$ のうち必要なものを選び，証明される順に左から右に並べよ。その列は P_1 から始まり P_{1000} で終わることとなる。