

# 数 学 $\frac{1}{8}$

I 次の各問に答えよ。なお、解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1)  $\frac{\sqrt{3}}{|\sqrt{3}-2|} = a + \sqrt{3}b$  を満たす有理数  $a, b$  を求めよ。

(2)  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  とする。 $\sin \theta = \frac{2}{3}$  のとき、 $\tan \theta$  の値を求めよ。

(3) 男子 2 人と女子 3 人が輪の形に並ぶとき、男子 2 人が隣り合うような並び方は、何通りあるか。

(4)  $a$  を正の定数とする。座標平面において、円  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  と直線  $y = 3x$  の 2 つの交点を A, B とする。線分 AB の長さが 2 となるときの  $a$  の値を求めよ。

(5) 次の方程式を解け。

$$49^x = \left( \frac{1}{343} \right)^{x+1}$$

(6) 点  $(1, 0)$  を通り、曲線  $y = x^3 - x + 1$  に接する直線のうち、傾きが最大であるものの方程式を求めよ。

(7) 座標空間に平行四辺形 ABCD があり、 $A(3, -1, 1)$ ,  $B(5, 0, 2)$ ,  $C(6, 2, 1)$  であるとする。このとき、頂点 D の座標を求めよ。

(8) 1 から 100 までの自然数について、5 の倍数でない数の和を求めよ。

## 数 学 $\frac{2}{8}$

〔メモ欄〕

Ⅱ 平面上の円  $O$  の円周上に 3 点  $A, B, C$  があり,

$$|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{AC}| = 4, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$$

を満たしている。このとき、次の各問に答えよ。

- (1)  $\cos \angle BAC$  を求めよ。
- (2)  $|\overrightarrow{BC}|$  を求めよ。
- (3) 円  $O$  の半径を求めよ。
- (4) 線分  $AD$  が円  $O$  の直径になるような円周上の点  $D$  をとる。 $\overrightarrow{AD}$  を  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  を用いて表せ。

# 数 学 $\frac{4}{8}$

〔メモ欄〕

Ⅲ (選択問題) Ⅲ と Ⅳ のいずれか 1 問だけを選択し、解答せよ。

関数  $f(x)$  を

$$f(x) = 2x \log(x^2 + e)$$

と定め、曲線  $y = f(x)$  上の点  $(0, f(0))$  での接線の傾きを  $m$  とする。また、傾きが  $2m$  で点  $(2, 8)$  を通る直線の方程式を  $y = g(x)$  とおく。このとき、次の各問に答えよ。ただし、ここで  $e$  は自然対数の底である。

(1)  $f'(x)$  を求めよ。

(2)  $g(x)$  を求めよ。

(3)  $x > 0$  において、 $f(x) - g(x) \geq 0$  となる  $x$  の値の範囲を求めよ。

(4) 不定積分  $\int f(x) dx$  を求めよ。ただし、積分定数は  $C$  とせよ。

(5) 定積分  $\int_0^{\sqrt{e^3 - e}} |f(x) - g(x)| dx$  を求めよ。

# 数 学 $\frac{6}{8}$

〔メモ欄〕

IV (選択問題) Ⅲ と IV のいずれか 1 問だけを選択し、解答せよ。

$n$  を 0 以上の整数として、複素数  $z_n$  を

$$z_n = \left(2 + \cos \frac{n\pi}{11}\right) \left(\cos \frac{\pi}{11} + i \sin \frac{\pi}{11}\right)^n$$

と定める。また、集合  $I$  を

$$I = \{w \mid w \text{ は虚数} \}$$

と定める。このとき、次の各問に答えよ。ただし、 $i$  は虚数単位である。

(1)  $0 \leq x < 44$  のとき、方程式  $\sin\left(\frac{\pi}{11}x\right) = 0$  を解け。

(2)  $0 \leq n < 44$  を満たす整数  $n$  で、 $z_n \in I$  となるものはいくつあるか。

(3) 集合  $J$  を

$$J = \{z_n \mid n \text{ は } 0 \leq n < 44 \text{ を満たす整数} \}$$

と定める。このとき、集合  $I \cap J$  の要素の個数を求めよ。

(4) (3) で定めた  $J$  に対し、集合  $K$  を

$$K = \{|z - 1|^2 \mid z \in I \cap J\}$$

と定める。このとき、集合  $K$  の要素の個数を求めよ。

# 数 学 $\frac{8}{8}$

〔メモ欄〕