Ⅰ　次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) 集合 A, B を

$$A=\{x \mid x \text{ は 30 以下の素数}\}, B=\{x \mid x \text{ は 4 で割ると 1 余る整数}\}$$

とする。このとき，集合 $A \cap B$ の要素をすべて列挙せよ。

(2) 放物線 $y=x^2-2ax+2a+4$ の頂点が放物線 $y=x^2$ 上にあるように定数 a の値を定めよ。

(3) 2次方程式 $2x^2+x-2=0$ の2つの解を α, β とする。 $\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ。

(4) 直線 $y=-\dfrac{1}{3}x+1$ に関して点 $\mathrm{A}(5,-4)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

(5) $1,1,1,1,2,2,2,3,3$ の9個の数字を使ってできる9桁の整数は何個あるか求めよ。

(6) $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ のカードが2枚ずつ合計6枚入っている袋から，無作為に1枚ずつ4回カードを取り出して，取り出した順に左から並べたとき，$\boxed{2}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{1}$ となる確率を求めよ。ただし，取り出したカードは袋に戻さないものとする。

(7) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{a}-2\vec{b}|=9$ が成り立つとする。このとき，2つのベクトル $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるような実数 t の値を求めよ。

(8) 自然数 n について，次の和 S_n を求めよ。

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

〔メモ欄〕

Ⅱ　O を原点とする座標平面上に２点 $A(7,7), B(-1,7)$ がある。$\angle AOB = \theta$ $(0 < \theta < \pi)$ とするとき，次の各問に答えよ。

(1) $\cos\theta$ を求めよ。

(2) $\angle AOB$ を二等分する直線を ℓ とする。ℓ の方程式を求めよ。

(3) $\angle OAB$ を二等分する直線を m とする。m の方程式を求めよ。

(4) $\triangle OAB$ の内接円の中心の座標を求めよ。

〔メモ欄〕

Ⅲ　(選択問題)　$\boxed{\text{Ⅲ と Ⅳ のいずれか 1 問だけを選択し，解答せよ。}}$

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\quad(0\leqq x\leqq 2)$$

とする。曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるものを ℓ とし，その接点を A とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 点 A で直線 ℓ と直交する直線を m とする。m の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と (2) の直線 m および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

〔メモ欄〕

Ⅳ　(選択問題)　$\boxed{\text{Ⅲ と Ⅳ のいずれか 1 問だけを選択し，解答せよ。}}$

楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,(a > 0, b > 0)$ 上に 2 点 P, Q がある。原点 O と直線 PQ の距離を h とし，線分 OP, OQ の長さをそれぞれ p, q とする。$\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の各問に答えよ。

(1) h を p, q を用いて表せ。

(2) h を a, b を用いて表せ。

(3) a, b が正の実数全体を動くとき，$\dfrac{h}{\sqrt{ab}}$ の最大値を求めよ。

〔メモ欄〕