Ⅰ　次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) 方程式 $4x^2+(a+3)x+a=0$ が実数解をもつように定数 a のとりうる値の範囲を定めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ において $\mathrm{BC}=6,\ \mathrm{AB}=\mathrm{AC},\ \angle\mathrm{B}=30^\circ$ のとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を求めよ。

(3) 9 人を 2 人，3 人，4 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(4) 中心が点 $(8,4)$ である円 C と，円 $x^2+y^2=5$ が外接するとき，円 C の方程式を求めよ。

(5) $\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{3},\quad \sqrt[4]{5},\quad \sqrt[6]{7}$ の大小を不等号を用いて表せ。

(6) 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=7,\qquad a_{n+1}=3a_n-4\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

(7) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-4}-x+6\right)$ を求めよ。

(8) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2 x\cos^2 x}\,dx$ を求めよ。

〔メモ欄〕

Ⅱ　空間内に 4 点 O, A, B, C があり，次式

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 6, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 3\sqrt{13}, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 5\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 36, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 57, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 30$$

を満たすとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ を求めよ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めよ。

(3) 3 点 O, A, B で定まる平面を α とし，平面 α 上に $\overrightarrow{\mathrm{CD}} \perp \alpha$ となる点 D をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(4) 4 点 O, A, B, C を頂点とする三角錐の体積を求めよ。

〔メモ欄〕

Ⅲ　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{x+2}{(x+3)(x+6)}$$

と定める。また，$f(x)$ が極大値をとるような x の値を a とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) a の値を求めよ。

(3) 等式 $\dfrac{x+2}{(x+3)(x+6)}=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x+6}$ が x について恒等式となるように，定数 A, B の値を定めよ。

(4) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸と直線 $x=-2$, $x=a$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

〔メモ欄〕