I　次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) 方程式 $4x^2+(a+3)x+a=0$ が実数解をもつように定数 a のとりうる値の範囲を定めよ。

(2) $\triangle$ABC において BC $=6$, AB $=$ AC, $\angle$B $=30^\circ$ のとき，$\triangle$ABC の外接円の半径を求めよ。

(3) 9 人を 2 人，3 人，4 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(4) 2 個のさいころを同時に投げるとき，少なくとも一方の目の数が素数になる確率を求めよ。

(5) 点 $(1,1)$ からの距離が $2\sqrt{10}$ であり，傾きが -3 である直線の方程式を求めよ。

(6) 中心が点 $(8,4)$ である円 C と，円 $x^2+y^2=5$ が外接するとき，円 C の方程式を求めよ。

(7) $\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{3},\quad \sqrt[4]{5},\quad \sqrt[6]{7}$ の大小を不等号を用いて表せ。

(8) 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=7,\quad a_{n+1}=3a_n-4\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

〔メモ欄〕

II 空間内に 4 点 O, A, B, C があり，次式

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 6, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 3\sqrt{13}, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 5\sqrt{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 36, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 57, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 30$$

を満たすとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ を求めよ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めよ。

(3) 3 点 O, A, B で定まる平面を α とし，平面 α 上に $\overrightarrow{\mathrm{CD}} \perp \alpha$ となる点 D をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(4) 4 点 O, A, B, C を頂点とする三角錐の体積を求めよ。

〔メモ欄〕

Ⅲ 関数 $f(x)=6x^2-9x$,　$g(x)=x^3+3x^2-9x+4$ について，次の各問に答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(2) 2 曲線 $y=f(x)$,　$y=g(x)$ の共有点の座標を求めよ。

(3) (2) で求めた共有点のうち x 座標が最も小さいものを点 A，x 座標が最も大きいものを点 B とする。点 A における曲線 $y=f(x)$ の接線を l_1，点 B における曲線 $y=g(x)$ の接線を l_2 とする。l_1 と l_2 の方程式を求めよ。

(4) (3) で求めた 2 直線 l_1 と l_2 の交点の x 座標を c とする。曲線 $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq c$ の部分と直線 l_1, $x=c$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

〔メモ欄〕