

I 次の各問に答えよ。なお、解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) m を定数とする。放物線 $y = x^2 - (m - 1)x - m$ が直線 $y = x - 3$ と接しているとき、 m の値を求めよ。

(2) 2024 の正の約数の個数を求めよ。

(3) 中心が点 $(-3, 4)$ で、円 $x^2 + y^2 = 4$ と外接する円の方程式を求めよ。

(4) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式

$$\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = \sqrt{2}$$

を満たす θ の値を求めよ。

(5) 5^{100} の桁数を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(6) 座標平面上において、ベクトル $\vec{a} = (5, 12)$ と垂直な単位ベクトルで、 x 成分が正のものを求めよ。

(7) $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$ とするとき、 α^8 を $a + bi$ (a, b は実数) の形で表せ。ただし、 i は虚数単位である。

(8) 曲線 $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$) の長さを求めよ。

数 学 $\frac{2}{6}$

〔 メ モ 欄 〕

Ⅱ p, q, r を正の定数とする。座標空間内の 3 点 $A(p, 0, 0)$, $B(0, q, 0)$, $C(0, 0, r)$ について $AB = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{5}$, $CA = \sqrt{10}$ が成り立っている。このとき、次の各問に答えよ。

(1) p, q, r を求めよ。

(2) $\cos \angle CAB$ を求めよ。

(3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ。

(4) 原点 $O(0, 0, 0)$ から平面 ABC に下ろした垂線を OH とする。線分 OH の長さを求めよ。

数 学 $\frac{4}{6}$

〔 メ モ 欄 〕

Ⅲ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x \sin \frac{x}{2}$$

と定める。座標平面上で、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(-\pi, f(-\pi))$ における接線を l とし、その方程式を $y = g(x)$ とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) $f'(x)$ を求めよ。
- (2) $g(x)$ を求めよ。
- (3) 不定積分 $\int x \sin \frac{x}{2} dx$ を求めよ。
- (4) 曲線 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ の部分と直線 l 、および直線 $x = \pi$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

数 学 $\frac{6}{6}$

〔メモ欄〕