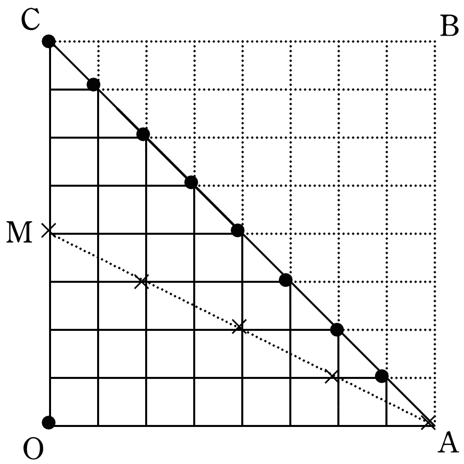
「平成 29 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

$\boxed{\mathbf{1}}$ △ABC において，辺 AC 上に点 D をとり，辺 AB 上に点 E をとる。

$$\angle \mathrm{CBD} = 60^\circ,\ \angle \mathrm{EBD} = 20^\circ,\ \angle \mathrm{BCE} = 50^\circ,\ \angle \mathrm{ECD} = 30^\circ$$

であるとき，∠CED の大きさを求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 下図のようなマス目からなる正方形 OABC がある。点 M は線分 OC の中点である。点 O からマス目に沿って対角線 AC 上の点に到達する最短経路のうち，線分 AM 上の ×の点を通らないものは何通りあるか。

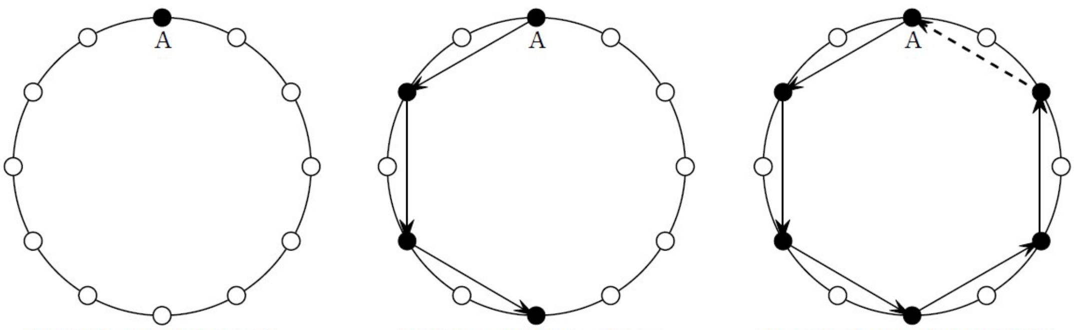


(2) (1) では正方形の 1 辺が 8 であったが，一般に 1 辺を $2n$ とすると何通りになるか。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 円周上に U 個のオセロの石を，白色を表面として重ならないように並べ，いずれか 1 個の石を裏返して，スタート地点 A とする。[**図 1** 参照]

点 A から順に，反時計回りに数えて n 個目の石を裏返すということを続ける。[**図 2** 参照]

次の石の表面がすでに黒色であればこの操作を終える。このとき，表面が黒色の石の合計を T_n とする。[**図 3** 参照] 次の問いに答えよ。



[図 1] $U=12$ のときの石を並べた状態。

[図 2] $n=2$ のとき，数えて 2 個目の石を順次裏返す。

[図 3] 次の石が黒色のため終了。この場合，$T_2=6$ である。

(1) $U = 12,\ 2 \leqq n \leqq 10$ とする。$T_n = 12$ を満たす最大の自然数 n を求めよ。

(2) $U = 100,\ 2 \leqq n \leqq 98$ とする。$T_n = 100$ を満たす自然数 n は全部で何個あるか。ただし，推測ではなく，その根拠を示した上で答えよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 自然数 N を 10 進法で書いたとき，N の各位の数の平方の和を $f(N)$ とする。例えば $N = 2017$ に対して $f(N) = 2^2 + 0^2 + 1^2 + 7^2 = 54$ である。この操作を有限回繰り返し，ループに入ったら（つまり同じ数が 2 回得られたら）そこで終了する。例えば $N = 2217$ から始めると

$$2217 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58$$

となり，58 から 58 へのループが得られる。次の問いに答えよ。

(1) $N = 2017$ からはじめたとき，ループに入ることを確かめよ。

(2) どの自然数から始めても，必ず 1 桁の数を含むループが得られることを示せ。また，ループに現れる 1 桁の数をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 自然数の組 (l, m, n) は，1 つの角が 120° であるような 3 角形の 3 辺の長さの組で $l < m < n$ なるものとする。 $k = l + m - n$ とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $lm - 2(l + m)k + k^2 = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $k = 7$ のとき, (l, m, n) の組をすべて求めよ。

(3) l のとり得る値を求めよ。