グ ラ フ 理 論 の 高 校 教 材 化

1 1 7 0 3 8 8 浅 井 剛

高 知 工 科 大 学 マ ネ ジ メ ン ト 学 部

1. 概要

本研究では，グラフ理論を高校教材として扱うために，グラフ理論を学び，実際に教材化することを目的とする．

2. 背景

近年，数ある数学の分野の一つとして，離散数学が注目されている．数学の大きな分野として挙げられる，代数学・幾何学・解析学などと比べ，予備知識も少なくてすみ，高校生にも理解しやすい．また，離散数学の性質上，視覚的に理解しやすく，最近重視されている「数学的活動」にも活躍が期待される．しかし，高校数学の時間数の制限等の理由から，現在の高校数学の単元にほとんど採用されていない．本研究では，離散数学の中核となる分野の一つであるグラフ理論の高校教材化を図る．

3. 目的

PISA 等の調査により，現在の高校数学における問題点として次の点が挙げられている．

・数学の身につけた知識・技能を実生活や学習等で活用すること

・論理的・数学的に事柄や場面を解釈すること

・論理的・数学的に自分の考えを表現すること

本研究では，これらの課題を解決する高校数学の一つの単元としてグラフ理論を教材化する．

4. 離散数学とは

現代の数学は大きく分けて四つの分野に分けることができる．

・代数学

・幾何学

・解析学

・その他（応用数学，離散数学など）

なかでも離散数学は 18 世紀オイラーによって発見された多面体定理，一筆書き定理などから発展した分野で，他の分野と比べて新しい分野と言える．

離散数学は，原則として離散的な対象，有限個の対象を扱う分野で，有限数学あるいは離散数理とも呼ばれることもある．離散数学の中核を成す分野として，グラフ理論，組合せ論などが挙げられる．有限であるものを対象としているため，実社会にある数学的課題の解決方法として優れている．

5. グラフ理論とは

グラフ理論とは，離散数学の一種で，グラフ（点と線の集合で構成される図形）に関する数学の理論である．

5.1 グラフとは

グラフとは，いくつかの点と，それらの点を結ぶ線からできている図のことである．（図 1）

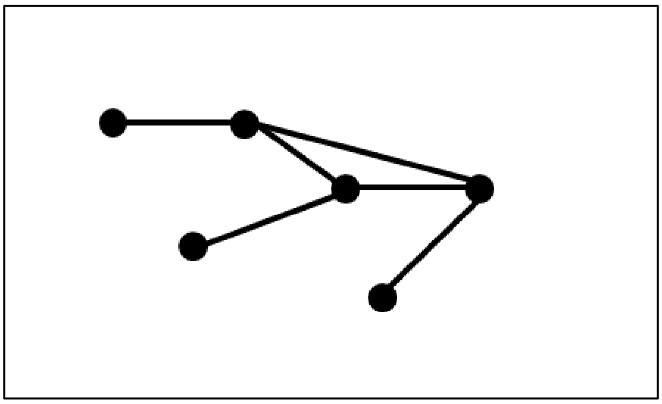


図 1

関数のグラフや統計で扱うグラフとは無関係である．また，点の位置や大きさ，線の長さに意味はなく，つながり方だけを考察する．

グラフの代表的な例として路線図があげられる．図 2 は名古屋の地下鉄の図である．この図では，地下鉄の駅を点で表し，線路を線で表している．ここでも点の大きさや線の長さは関係なく，点（駅）同士のつながり方だけを表している．この路線図と，実際の地図を見比べればわかる通り，グラフを用いれば欲しい情報（駅同士のつながり方）がわかりやすくなる．

頂点の個数が同じで，頂点同士のつながり方も同じである２つのグラフは同型であるという．先に挙げた線路図には数種類のデザインのものがあるが，どのグラフも各駅のつながり方は同じなので，同型である．

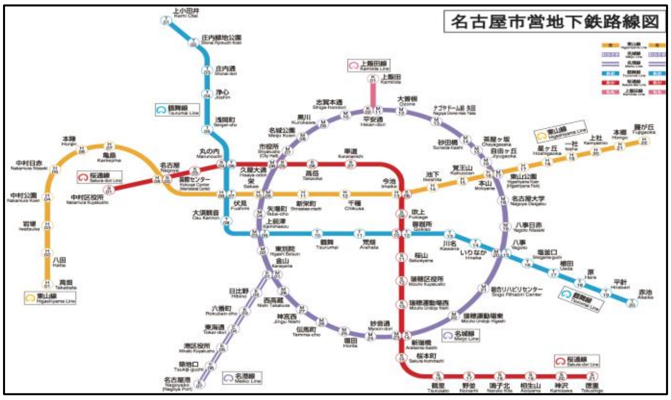


図 2

5.2　用語

　ここでは，グラフ理論に関する用語の説明をする．

・グラフにおいて，頂点の個数を位数と呼ぶ．図 1 のグラフは位数 6 となる．

・頂点 v_1，v_2 が辺 e で結ばれているとき，頂点 v_1，v_2 を辺 e の端点という．また，そのとき v_1 と v_2 は隣接しているという．さらに，頂点 v_1 と辺 e は接続しているという．

・頂点に接続している辺の本数を，その頂点の次数という．

・次数が奇数の頂点を奇点，偶数の頂点を偶点と呼ぶ．

・グラフにおいて，辺に沿って頂点をたどったときの頂点の並び（列）を歩道といい，その時たどる辺の本数を，その歩道の長さという．

・始点と終点が一致する歩道を閉歩道という．

・すべての辺が異なる閉歩道を閉小径という．

・始点と終点が一致し，それ以外の頂点がすべて異なる歩道をサイクルという．

・グラフのどの 2 頂点についても，その 2 頂点を運ぶ歩道が存在するとき，そのグラフは連結であるという．

・連結であるグラフを連結グラフという．

5.3　いろいろなグラフ

　ここでは，特別なグラフの紹介をする．

・サイクルのないグラフを林といい，サイクルのない連結グラフを木という．

・頂点が 2 つのグループに分けられ，同じグループの頂点同士は辺で結ばれないグラフのことを二部グラフという．(1)のグラフは，$\{A, C, E\}$ と $\{B, D, F\}$ に分けて頂点を移動すると（2）のグラフになり，同じグループの頂点同士は隣接していないので二部グラフである．

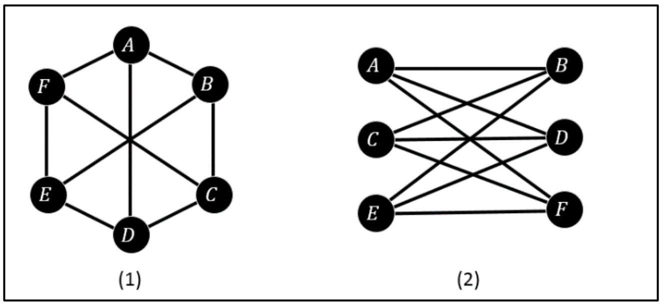


図 3

・位数 1 のグラフを自明なグラフという．

・すべての 2 頂点間に辺があるグラフのことを完全グラフという．

・異なるグループのすべての 2 頂点間に辺がある二部グラフのことを，完全二部グラフという．

・すべての頂点の次数が等しいグラフを正則グラフという．

・グラフ G の辺と線をいくつか取り除いてできるグラフをグラフ G の部分グラフという．

・グラフのすべての辺を一回ずつ通る歩道をオイラー路といい，中でも始点と終点が一致しているものをオイラー閉路という．

・オイラー閉路を持つグラフのことをオイラーグラフという．

・どの辺も交わらないように平面上に描くことが可能なグラフのことを，平面的グラフといい，平面的グラフを実際に辺が交わらないように描いたグラフを，平面グラフという．以下のグラフ（1）は平面的グラフではあるが,平面グラフではない．

グラフ（2）は平面的グラフでもあり,平面グラフでもある．

・グラフの辺で囲まれた部分のことを領域という．ただし，グラフの外側の部分も領域と考える。

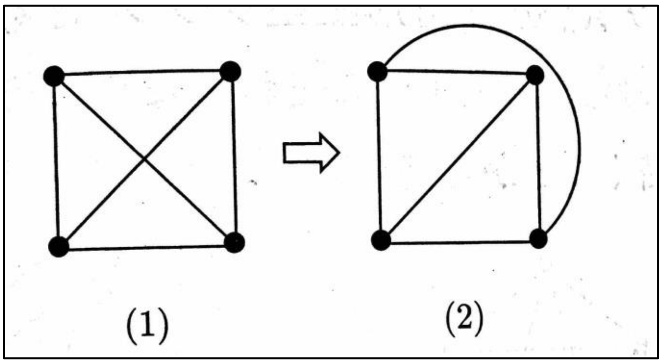


図 4

5.3　グラフ理論の定理

ここでは，グラフ理論に関する定理を紹介する．

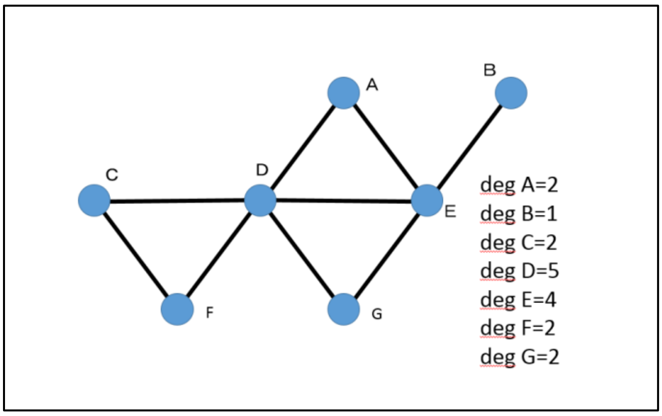


図 5

・グラフの頂点の次数の総和は，グラフの辺の本数の２倍に等しい．

・連結グラフの奇点は偶数個である．

図５のグラフにおいて，上の２つの定理が成り立っていることは直接確認できる．

・連結グラフ G がオイラーグラフであるための必要十分条件は，G が奇点を持たないことである．

[証明]

(⇒) グラフにオイラー閉路が存在するとき，グラフは一筆書きができ，さらに始点と終点が一致しているので，すべての頂点は偶点となる．

(⇐) 辺の個数 q についての数学的帰納法で示す．

q=2 のとき自明であるので， q<k のとき正しいとして， q=k のとき正しいことを示す． グラフの最小次数を s とする． s≧2 より， G はサイクルをもつので閉小径をもつ．閉小径の中で最長のものを C とする． G=C であることを背理法によって証明する． G≠C とする． G から C を取り除いた部分グラフを考え， H をその一つの連結成分とする．このとき， H は奇点を持たず辺の数は k より小さい．帰納法の仮定より， H はオイラーグラフである． $C \cup H$ は閉小径であり， C より長い．これは C の最長性に反する．よって， G=C である． (証明終了)

この定理より次の結果が従う．

・「オイラーの一筆書き定理」連結グラフにオイラー路が存在するための必要十分条件は，グラフに奇点が高々２個しかないことである．

・「オイラーの定理」連結平面グラフの頂点の個数を p，辺の本数を q，領域の個数を r とする．そのとき，

$$p - q + r = 2$$

という関係が成り立つ．

[証明]

$z = p - q + r$とする．

① 平面グラフの中に，３つより多くの辺をもつ面があるならば，この多角形に１つの対角線を引く．このようにすると，面と辺はそれぞれ１つずつ増えるが，頂点の個数は変わらないから，zの値は変わらない．平面グラフのすべての面が３角形になるまでこの変形を続ける．

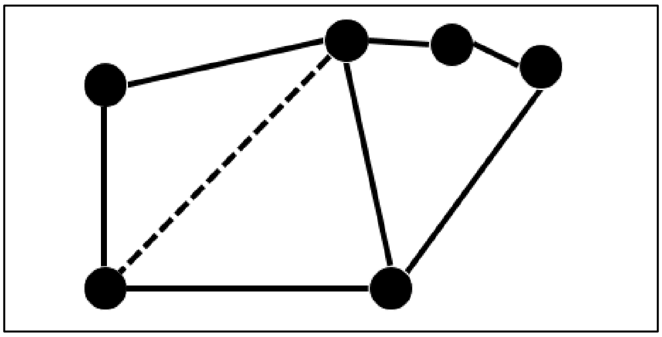


図 5

② このようにして得られた１つの３角形の辺の外側に，この辺の両端の頂点を頂点として持つ新しい３角形を１つ付け加えてみる．そうすると，頂点と面の個数はそれぞれ１つずつ増え，辺の個数は２つだけ増えるから，z の値は変わらない．

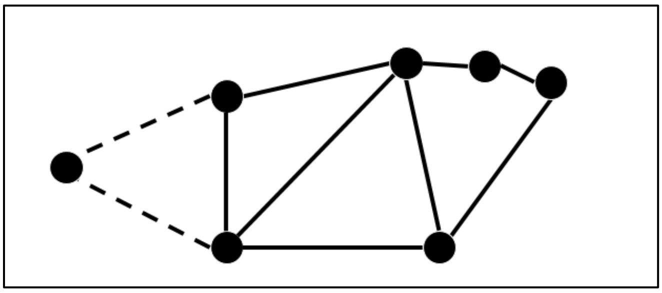


図 6

③ 平面グラフの周囲の凹な場所に，２つの頂点を結ぶ新しい辺を付け加えて３角形を作ってみても，やはりzの値は変わらない．なぜならば，これによって頂点の個数は変わらないが，辺と面の個数はそれぞれ１つずつ増えるからである．

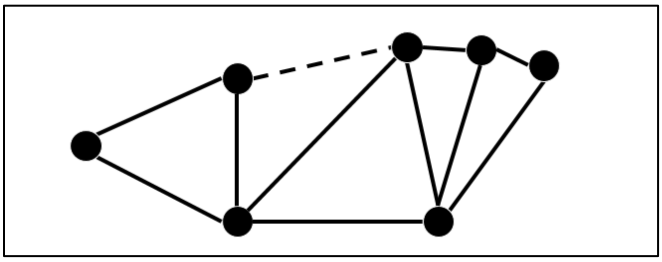


図 7

任意の平面グラフは，ただ１つの 3 角形に②と③の２通りの操作を繰り返して適用することによって作られてできる平面グラフに①の逆の操作,すなわち辺を取り除くことによってできる．

ここで,１つの３角形に対しては,

$$z = p - q + r$$
$$= 3 - 3 + 2$$
$$= 2$$

である．以上のことから，任意の平面グラフに対して

$$p - q + r = 2$$

が成り立つことがわかる．（証明終了）

6.　教材（授業案）

別ページ

7.　参考文献

小林みどり『あたらしいグラフ理論』 牧野書店，2013 年

落合豊行『グラフ理論入門』日本評論社，2004 年

数学科　学習指導案

担当者　（ 浅井 剛 ）

1　日時・場所　（　）年（　）月（　）日（　）第（　）校時　（場所　　　）
2　年次・クラス　（　）年次（　）組　　選択者（　）名（男子　名　女子　名）
3　単元名　（ 数学B グラフ理論 ）
4　単元について
　(1)教材観

　(2)生徒観

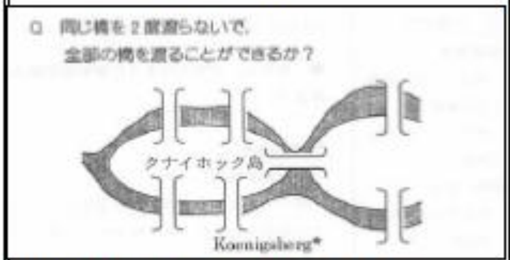
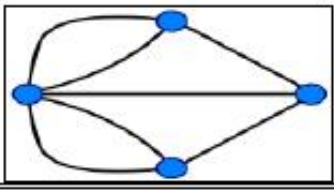
　(3)指導観

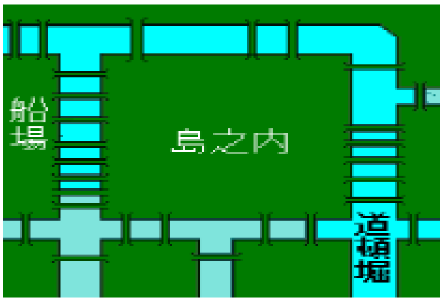
5　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
グラフに関心をもつとともに、与えられた課題の解決に活用しようとする。	数学的な見方や考え方を身につけ、離散的な事象についてグラフを用いて考察することができる。	グラフを用いて離散的な事象を表現し、目的に応じて数学的に処理することができる。	グラフにおける基本的な概念、原理・法則、用語・記号などを理解し、基礎的な知識を身につけている。

6　本時の学習

本時の目標
　グラフ理論を用いて、実社会にある数学的課題を解決する。

段階	時間	学習内容・学習活動	○教師の支援　◇評価の観点・方法等
導入	5分	ケーニヒスベルクの問題を考える。  班に分かれて意見を交換し、発表する。 期待する意見：一筆書きの問題として考える。	◇与えられた問題に意欲的に取り組んでいるか（関心意欲態度）
展開①	20分	復習 ・オイラーの一筆書き定理 連結グラフにオイラー路が存在するための必要十分条件は、グラフに奇点が高々2個しかないことである。 問題の図をグラフで表す 	◇グラフを用いて離散的な事象を表現し、目的に応じて数学的に処理することができる。（表現・処理） ○橋を辺に、土地を頂点にすればよいことを強調する。

		解　　問題の図について、土地を頂点とし、橋でつながっている土地同士を線で結ぶとグラフになる。 このとき、このグラフの各頂点の次数はそれぞれ、3,3,3,5 であり、奇点が 4 つある。 したがって、オイラーの一筆書き定理によりこのグラフにはオイラー路が存在しない。 よって、問題の同じ橋を 2 度渡らずにすべての橋を渡ることはできない。	
展開②	20分	**問** **江戸末期の大阪道頓堀の28橋の場合を考える。**  解　　問題の図について、土地を頂点とし、橋でつながっている土地同士を線で結ぶとグラフになる。 このとき、このグラフの各頂点の次数はそれぞれ、7,11,21,7,2,4,3,1 であり、奇点が 6 つある。 したがって、オイラーの一筆書き定理によりこのグラフにはオイラー路が存在しない。 よって、問題の同じ橋を 2 度渡らずにすべての橋を渡ることはできない。	**◇グラフを用いて離散的な事象を表現し、目的に応じて数学的に処理することができる。（表現・処理）**
まとめ	5分	**次回予告と課題提示**	