折り紙に関する数学

1180451　杖谷 望
高知工科大学マネジメント学部

1.　概要

本研究では，折り紙を使った数学についての基礎事項について論じる。

2.　背景

平成 29 年度全国学力学習状況調査における図形の範囲の課題点として様々な点が挙げられている。その課題を解決するために必要な指導として以下の２つが挙げられている。

・図形の考察を通して，辺や角についての位置関係を捉える活動

・見いだした事柄や事実について数学的に表現すべき部分を明確にして説明する活動

これらのうち、1 つ目の活動について具体的には、以下のように述べられている。

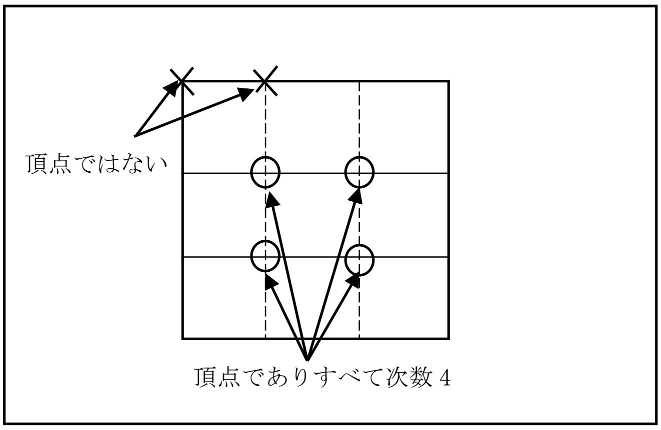
・ 図形における辺や角などの位置関係についての理解を深められるようにするために，実際に平面上に図形をかいたり，コンピュータを利用して示したりしながら視覚的に捉え，辺や角の位置関係について確認したり，検討したりする活動を重視することが大切である。

そのため、視覚的にとらえる手段の一つとして、折り紙を用いることを考えた。身近な折り紙を用いることで図形に対しての興味関心も高まるのではないかと考えた。本研究では、具体的な指導方法を考えるために必要な折り紙に関する数学についての基礎事項をまとめる。

3.　内容

3.1　折り紙の数学に関する基本事項

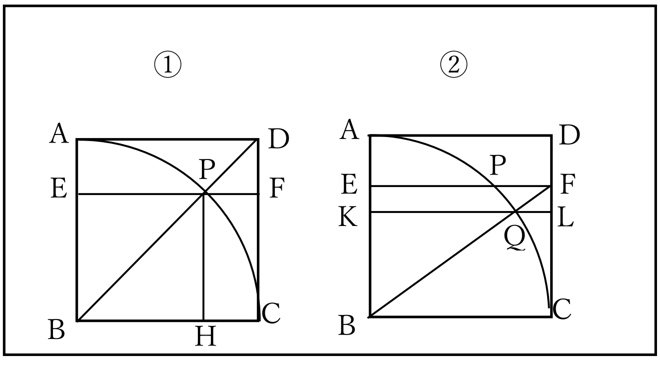
ここでは、折り紙の数学について基本となる事項について説明する。まず、折り紙の折り方には山折りと谷折りの２種類があり、ここでは山折りを実線、谷折りを破線で書き表す。また、ここでの頂点とは、2 本あるいはそれ以上の折り目が紙の境界線部分以外でぶつかっているところのことである。　また、それぞれの頂点に入ってくる折り目の数のことを次数と呼ぶ。(図 1)



（図１）

3.2 折り紙によるルート長方形の作図

まずここでのルート長方形とは、縦と横の比が１：１、１：$\sqrt{2}$、１：$\sqrt{3}$:、１：２、１：$\sqrt{6}$、１：(１＋$\sqrt{5}$)/２(黄金比)の 6 種類の長方形のことである。正方形からルート長方形の作図方法は以下のとおり。①正方形の対角線ＤＢを引き、ＢよりＢＡ＝ＢＰになるようにＰをとる。Ｐを通りＢＣに平行にＥＦを引くと長方形ＥＦＣＢは$\sqrt{2}$長方形になる。②$\sqrt{2}$長方形の対角線を引き、その上にＡＢ＝ＢＱになるようにＱ点を通りＢＣに平行線を引く。そうすると長方形ＫＬＣＢは$\sqrt{3}$長方形になる。これを続けると$\sqrt{n}$長方形を作成できる。(図２)



（図２）

作図したものが求めるルート長方形になっていることは、相似な三角形の性質を使って証明できる。以下に$\sqrt{2}$長方形

の場合の証明を記す。

（証明）

ＰからＢＣに向かって垂線を下ろし交点をＨとする.

△ＢＰＨと△ＢＤＣにおいて二つの角がそれぞれ等しいので△ＢＰＨ∽△ＢＤＣであり、ＰＨ：ＤＣ＝ＢＰ：ＢＤ.

また、ＡＢ＝１とすると正方形の対角線なのでＢＤ＝$\sqrt{2}$.

ＡＢ＝ＢＰより、ＢＰ＝１となる.

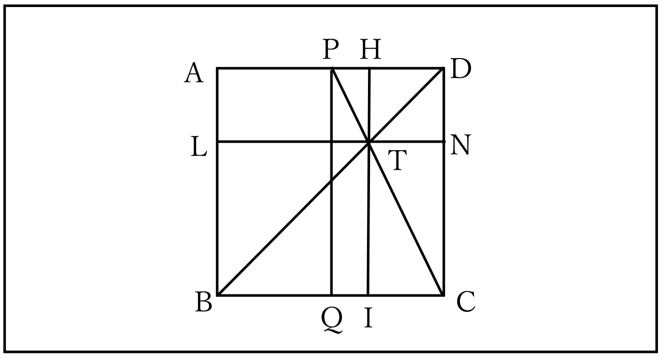
したがって、ＰＨ：ＤＣ＝ＢＰ：ＢＤ＝１：$\sqrt{2}$となる.

さらに、ＰＨ＝ＦＣ，ＤＣ＝ＢＣよりＦＣ：ＢＣ＝１：$\sqrt{2}$.

ゆえに長方形ＥＢＣＦは$\sqrt{2}$長方形である.（証明終）

3.3 折り紙１辺のｎ等分

折り紙を半分に折ると辺が二等分されることは直感的にわかるが、3 等分や 5 等分についても正確に行う方法がある。ここでは 3 等分の方法についてのみ示す。まず正方形ＡＢＣＤに対角線ＢＤを引く。次にＡＤの中点Ｐを取り、ＢＣに垂線ＰＱを下ろす。長方形ＰＱＣＤに対角線ＰＣを引く。Ｔを通りＡＤ、ＤＣにそれぞれ平行なＬＮ、ＨＩを引く。すると、正方形の１辺の長さを１としたときに、ＨＤ＝ＤＮ＝１／３となる。（図３）



（図３）

（証明）

△ＰＴＤと△ＣＴＢにおいて、ＡＤ//ＢＣであり、平行線の錯角は等しいので

∠ＤＰＴ＝∠ＢＣＴ, ∠ＰＤＴ＝∠ＣＢＴ

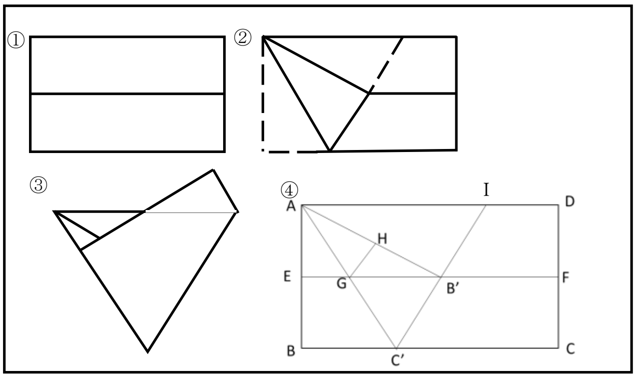
したがって、２組の角が等しいので△ＰＴＤ∽△ＣＴＢ. よって、ＰＴ/ＣＴ＝ＴＤ/ＴＢ＝ＰＤ/ＣＢ＝１/２. ゆえに

ＰＴ＝１/３×ＰＣ.

また、△ＣＤＰにおいてＰＤ//ＴＮよりＤＮ/ＤＣ＝ＰＴ/ＰＣ＝１/３. よってＤＮ＝１/３×ＤＣ. したがって、ＤＣ＝１とするとＤＮ＝１/３.（証明終）

3.４ 折り紙による正多角形の作成

まず正多角形とは、辺の長さがすべて等しく、角の大きさもすべて等しい平面図形のことである。ここでは長方形から正三角形をつくる方法についてのみ示す。作成方法は①まず長方形を２つに折り、ひろげる。②次に、長方形の１つの頂点を固定し、他の頂点をはじめにつけた中線に合うように折る。③②でできた直角三角形にそって折る。④ひろげると正三角形ができている。（図４）



（図４）

図のＡＣ′Ｉが正三角形になることを証明する。

（証明）

ＡＤ//ＥＦであり、平行線の錯角は等しいので∠ＩＡＢ′＝∠ＡＢ′Ｇ. Ｇより垂線を下ろしＡＢ′との交点をＨとすると△ＡＣ′Ｂ′でＧＨ//Ｃ′Ｂ′よりＡＨ:ＨＢ′＝ＡＥ:ＥＢ＝ＡＧ:ＧＣ′＝１:１. したがってＡＨ＝ＨＢ′. また、△ＡＧＨと△Ｂ′ＧＨにおいてＡＨ＝ＨＢ′. ＧＨは共通. ∠ＡＨＧ＝∠Ｂ′ＨＧ＝９０°. よって、直角三角形の斜辺と他の一辺が等しいので△ＡＧＨ≡△Ｂ′ＧＨ. さらに、合同な図形の対応する角は等しいので∠ＧＡＨ＝∠ＧＢ′Ｈ. さらに、折り返した角は等しいので∠ＧＡＨ＝∠ＧＡＥ. したがって

∠ＥＡＧ＝∠ＧＡＨ＝∠ＧＢ′Ｈ＝∠Ｂ′ＡＩ＝３０°

また、∠ＥＡＧ＋∠ＧＡＨ＋∠Ｂ′ＡＩ＝９０°. ゆえに

∠Ｃ′ＡＩ＝６０°

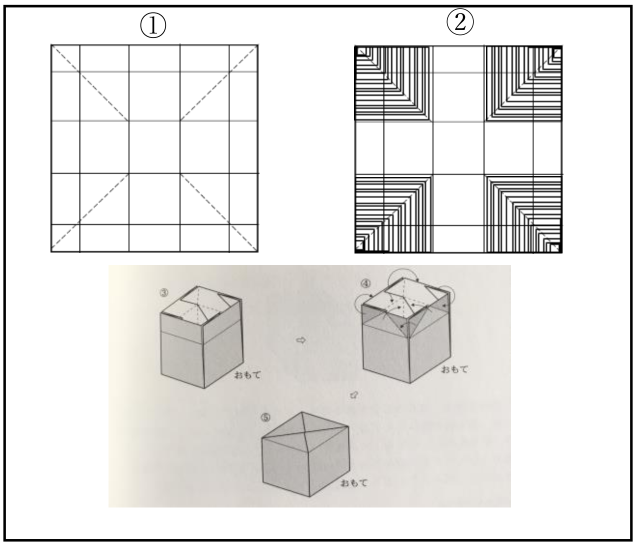
△ＡＣ′Ｂ′は直角三角形で∠Ｃ′ＡＢ′＝３０°より

∠ ＡＣ′Ｂ′＝６０°

また、△ＡＣ′Ｉは２つの角が６０°なので残りの１つの角も６０°となり△ＡＣ′Ｉは正三角形である。（証明終）

3.5 折り紙による正多面体の作成

正多面体とは、全ての面が合同な正多角形で、いずれの頂点に集まる辺の数は等しく、凸多面体であるもののことである。また、正多面体は５種類しかないことが知られている。今回は、そのうちの１つである正４面体作成方法について示す。①のように折り目を付ける。②の斜線部分を内側へ折りこむと③のようになる。④の斜線部分を折りこみ、ふたの部分を作る。（図５）



（図５）

3.6　立体の外形充填

外形充填とは、大きな物体を小さな物体で埋め尽くすことである。最も単純な例として立方体の小立方体による充填がある。これは１種類の正多面体による充填である。１種類の正多面体で充填できないものの１つとして、正四面体があり、実際には正四面体と正八面体によって充填できる。正四面体が１種類の立体で充填できないことは、体積の計算などにより証明できる。

以下、正四面体の正四面体と正八面体による充填について述べる。一辺の長さがｎの正四面体をT_nとする。T_nを充填するのに必要な１辺の長さが１の正四面体の個数をa_n，T_nを充填するのに必要な１辺の長さが１の正八面体の個数を　p_nとする。このとき数列｛a_n｝，｛p_n｝に規則性があり、一般項を求めることができる。それぞれの個数を求める一般項を示す。

（ｉ）正４面体の個数について示す。求める一般項をa_nとする。まず、いくつかは実際に作って個数を調べる。そうすると｛a_n｝は１，４，11, 24, 45, …となっている。これより、階差数列を利用して一般項を考えていく。その階差数列を｛b_n｝とすると｛b_n｝は３，７，13, 21, …となっている。さらに｛b_n｝の階差数列を｛c_n｝とする。すると｛c_n｝は４，６，８，…となり、これは公差２、初項４の等差数列である。したがって、

$$c_n = 2n + 2$$

｛c_n｝は｛b_n｝の階差数列であることより、$b_n = b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i$より

$$b_n = n^2 + n + 1$$

さらに｛b_n｝は｛a_n｝の階差数列なので$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$より、

$$a_n = 1/3 \times n\left(n^2 + 2\right)$$

となる。(図６)

a_1　a_2　a_3　a_4　a_5　. . .　a_{n-1}　a_n　a_{n+1}　. . .
1　4　11　24　45　. . .
b_1　b_2　b_3　b_4　. . .　b_{n-1}　b_n　b_{n+1}　. . .
3　7　13　21　. . .
c_1　c_2　c_3　. . .　c_{n-1}　c_n　. . .
4　6　8　. . .
2　2

（図６）

（ⅱ）正８面体の個数について示す。求める一般項をp_nとする。まず、いくつかは実際に作って個数を調べる。そうすると｛p_n｝は０，１，４，10, 20…となっている。これより、階差数列を利用して一般項を考えていく。その階差数列を｛q_n｝とすると｛q_n｝は１，３，６，10, …となっている。さらに｛q_n｝の階差数列を｛r_n｝とする。すると｛r_n｝は２，３，４，…となり、これは公差２、初項４の等差数列である。したがって、

$$r_n = n + 1$$

｛r_n｝は｛q_n｝の階差数列であることより、$q_n = q_1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_i$より

$$q_n = 1/2 \times (n^2 + n)$$

さらに｛q_n｝は｛p_n｝の階差数列なので$p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} q_k$より

$$p_n = 1/6 \times n(n^2 - 1)$$

となる。(図7)

$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad \cdots \quad p_{n-1} \quad p_n \quad p_{n+1} \quad \cdots$

$0 \quad 1 \quad 4 \quad 10 \quad 20 \quad \cdots$

$q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad \cdots \quad q_{n-1} \quad q_n \quad q_{n+1} \quad \cdots$

$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad \cdots$

$r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad \cdots \quad r_{n-1} \quad r_n \quad \cdots$

$2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots$

$1 \quad 1$

（図 7）

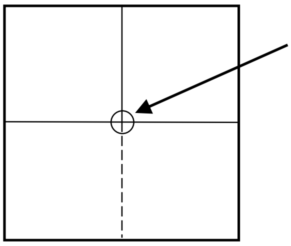
3.7　頂点での平坦折り

まず、平坦折りとは平面に平行に紙の層が積み重なった状態に折ることである。頂点での平坦折りに関する定理の１つである前川＝ジュスタン定理を述べる。

前川＝ジュスタン定理

平坦に折られた紙で、M個の山折りとＶ個の谷折りが１つの頂点でぶつかっているとする。このときMとＶの差は２である。つまりM＝Ｖ＋２かＶ＝M＋２が成立する。

【平坦折りできる例】



この頂点における

山折りの個数Mは３

谷折りの個数Ｖは１

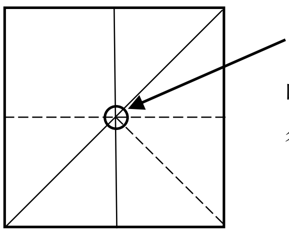
したがって

M＝Ｖ+2

（図 8）

一方、例えばM＝Ｖ＋１の図形では平坦折りすることができない。（図９）

【平坦折りできない例】



この頂点における

山折りの個数Mは４

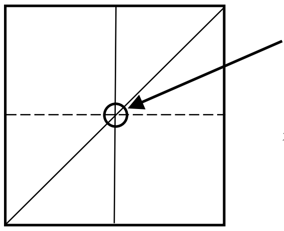
谷折りの個数Ｖは３

したがって

M＝Ｖ＋１

（図 9）

逆にM＝Ｖ＋２かＶ＝M＋２をみたしていても必ずしも平坦折りできるわけではない。（図 10）



この頂点における

山折りの個数Mは４

谷折りの個数Ｖは２

したがって

M＝Ｖ＋２

であるが 2 つの例は平坦折りすることは出来ない。

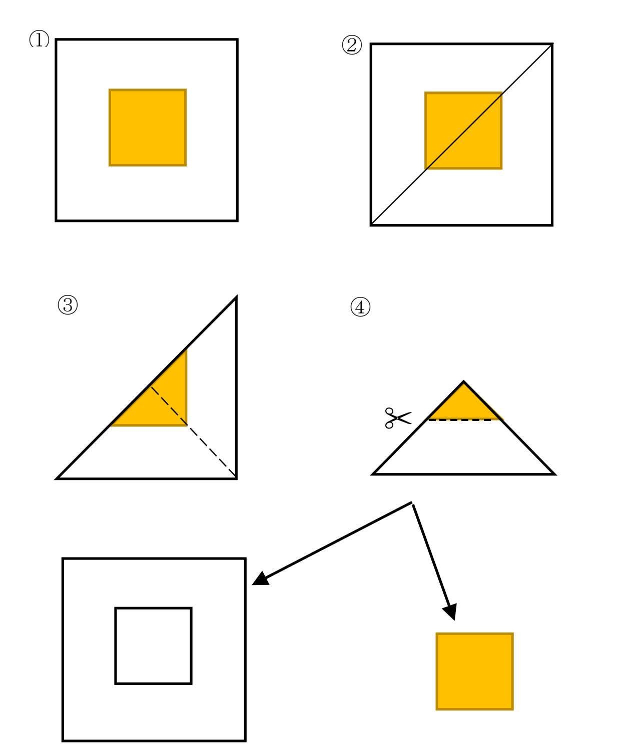
（図 10）

3.8　一刀切り定理

一刀切りの定理

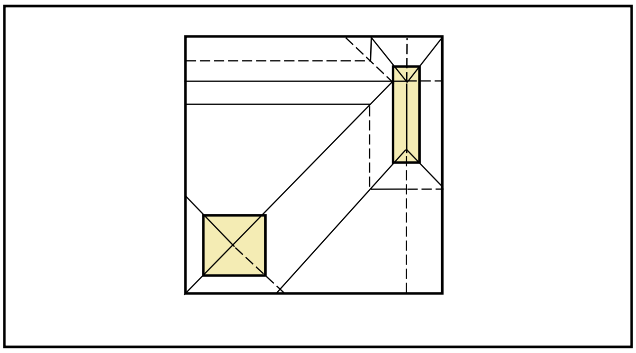
1 枚の紙の上に任意の直線分のみで構成される描画は、紙を平坦に折ってただ１度だけハサミを入れるだけで、描画の直線部分だけを正確に切り抜くことができる。

例えば、折り紙の中にある正方形は以下のようにして折ると一刀切りすることができる。（図 11）



（図 11）

この定理における任意の直線分のみで構成される描画は、一つの平面に一つだけという縛りはない。例としては、折り紙上に正方形と長方形を書いたものは、平坦折りをすると一刀切りが可能であり、正方形と長方形のみがきれいに切り抜かれる。(図 12)



(図 12)