勝ち抜き戦における選手の最適出場順序のゲーム理論的考察

～疲労度を考慮した分析～

1180458　中世　拓磨
高知工科大学マネジメント学部

1.　概要

本研究では、スポーツの個人戦の勝敗を記述する確率モデルとしてよく知られている *Bradley-Terry* モデルを用いて、団体戦の勝ち抜き戦における最適な選手の出場順序について数理的およびコンピューターによる数値計算により考察する。先行研究の加藤（2012）では、勝ち抜き戦において選手の出場順序がチームの勝利確率に依存しないことが証明されている。本研究では、加藤（2012）のモデルに、1 試合ごとに選手が疲労していき、戦力が減少していくという現実的状況を想定して、加藤（2012）の結果が維持されるのかを検証する。その結果、選手の疲労を加味した条件下では、強い選手を後ろに置くという、現実でしばしば観察される定石のような出場順序が、実際に最適出場順序となることが確認できた。

2.　背景

一般的な球技や格闘技などの競技は自らの記録に関係なく、対戦相手との試合で勝敗がきまる対戦型競技である。対戦型競技の中に複数プレイヤーから成るチーム同士の対戦で勝敗を決める団体戦競技がある。団体戦の例として球技では卓球、テニス、ゴルフ、格闘技では柔道、剣道、プロレスリング、スポーツ以外では将棋、囲碁、麻雀など多くの競技を挙げることができる。

このようなスポーツの団体勝ち抜き戦においては、選手の出場順序を事前に決める必要がある。出場順序を上手に利用することにより、対戦相手と同程度の強さであっても、勝率を上げることができたり、または下がる結果になったりすることが予想される。それでは、実際にどのような出場順序とすることが良いのであろうか。

現実の団体戦の出場順序を見てみると、多くのスポーツでは大将に一番強い人を持ってくる、先鋒に強い人を持ってくる、などの定石のようなものがあるように思える。ではこれは本当に合理的な選択なのであろうか。

加藤（2012）では、個人戦の勝敗を決定する *Bradley-Terry* モデルを応用して、団体戦の出場順序に関するゲーム理論的な考察を行った。*Bradley-Terry* モデルは、個人の強さを戦力を表す実数により表現し、2 人の選手の勝敗が戦力の比により決まると考える確率モデルである。加藤（2012）は、スポーツの団体戦の勝敗決定方法としてよく用いられている勝ち抜き戦では、選手の出場順序がチームの勝利確率に依存しないことを証明した。この結果は、オーダーをどのように決めるかについて気を配る必要はないということを示唆していると考えられる。

しかるに、加藤（2012）の設定は実際に重要な、選手が勝てば勝つほど試合数が増え、疲労するという条件を無視している。実際、柔道の全国高等学校柔道選手権大会や金鷲旗高校柔道大会では団体戦で勝ち抜き戦が採用されている。これらの大会では試合時間 3 分または 4 分で試合が行われている。一本勝ちなどの決まり手によって試合の勝敗が早く決まることはあるにしろ、3 分、4 分間全力で戦った後の次の試合ではすべての力を出し切れるとは思わない。また、勝ち抜くことで連戦になるのであれば、より疲労していないときとの戦力の差は顕著になると言い切れるのではないだろうか。

本研究では、加藤（2012）のモデルに、選手の疲労を加味して、このモデルの再検討を行う。具体的に述べると、加藤（2012）のモデルに本研究では疲労パラメーター加える。疲労パラメーターとは選手が 1 試合戦った時の疲労を表す指標である。1 試合行うごとに、戦力が疲労パラメーターにより割り引かれていくとして、選手の疲労による弱体化を表現する。疲労パラメーターについて詳しくは後に記述する。

本研究の結果について概要を説明する。2 人勝ち抜き戦に疲労パラメーターを導入した場合、加藤（2012）の結果とは異なり、後ろに強い選手を配置する出場順序を選択した方が

チームの勝利確率が高いことが分かった。また、2 人勝ち抜き戦と同様に 3 人勝ち抜き戦に疲労パラメーターを導入した場合には、疲労パラメーターの数値によって最適出場順序やチームの勝利確率が変化した。そして、5 人勝ち抜き戦でも同様に、疲労パラメーターの数値によって最適出場順序やチームの勝利確率が変化した。

本論文の残りの構成は以下の通りである。3 章では本研究の核である *Bradley-Terry* モデルの説明も交えて研究方法を記述する。4 章では本研究の勝率の計算方法、加藤（2012）の再現ならびに疲労を加味した条件下での 2 チーム選手 2 人の 2 人勝ち抜き戦について記述する。5 章では、4 章と同様の方法で疲労パラメーターを導入した条件下での 2 チーム選手 3 人の 3 人勝ち抜き戦を記述し、6 章でも同様の方法で疲労パラメーターを導入した条件下での 2 チーム選手 5 人の 5 人勝ち抜き戦を述べる。7 章では、本研究の結論を述べ、本論文の終わりとする。

3. 研究方法

本研究は前述した先行研究である加藤（2012）、*Bradley-Terry* モデルに、新たに疲労パラメーターを加えて再計算を行い、疲労を加味した上での最適出場順序について分析する。

まず、本研究の計算に用いる *Bradley-Terry* モデルについて説明をする。

Bradley-Terry モデル

まず、本研究の前提として選手間の試合には引き分けが起こらないものと仮定する。また、選手間の勝敗を決定する確率モデルに *Bradley-Terry* モデル（以下 *BT* モデルと呼ぶ）を用いる。*BT* モデルでは選手それぞれに強さを表す正の数を与える。例として、強さ a の選手 1 と強さ b の選手 2 が対戦し、強さ a の選手 1 が勝つ確率は

$$\frac{a}{a+b}$$

と定まる。

4. 2 人勝ち抜き戦

4.1 勝率の計算方法

ここで *BT* モデルを用いて、2 チーム間の勝利確率の計算方法についての説明をする。対戦する 2 チームをそれぞれチーム A、チーム B とおく。両チームは M 人、N 人からなっているものとし、出場順序順に戦い、勝った選手は続けて戦い、敗れた選手はチームから去り、先に全滅したチームが団体戦の敗者となる。各チームの選手に番号を付しそれぞれチーム A（1、2、…M)、チーム B（1、2、…N）とする。*BT* モデルを仮定してチーム A の選手 i の強さを a_i、チーム B の選手 j の強さを bj とする。$M=2, N=2$ の場合を考える。各チームの出場順序はそれぞれチーム A（1→2)、チーム B（1→2）とし、勝ち抜き戦のチーム A の勝利確率を P_A とする。チーム A が勝つケースは（ｉ）チーム A の選手 1 がチーム B の選手 1、選手 2 に連勝する。（ⅱ）チーム A の選手 1 がチーム B の選手 1 に勝つがチーム B の選手 2 に負け、チーム A の選手 2 がチーム B の選手 2 に勝つ。（ⅲ）チーム A の選手 1 がチーム B の選手 1 に負けるが、チーム A の選手 2 がチーム B の選手 1、選手 2 に連勝する場合である。したがって、チーム A の勝利確率 P_A は

$$P_A = \frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{a_1}{a_1+b_2}$$

$$+\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{b_2}{a_1+b_2}\frac{a_2}{a_2+b_2}$$

$$+\frac{b_1}{a_1+b_1}\frac{a_2}{a_2+b_1}\frac{a_2}{a_2+b_2}$$

となる。

先行研究である加藤（2012）は、*BT* モデルを用いて、団体戦におけるチームの勝利確率が選手の出場順序に依存しないことを数理的に証明している。次節では加藤（2012）の結果が 2 人勝ち抜き戦のときに成立することを実際に確認する。

4.2 先行研究の再現

加藤（2012）の結果である勝ち抜き戦におけるチームの勝利確率が選手の出場順序に依存しないことを再現する。

$M=2$、$N=2$ で各チームの選手それぞれ戦力をチーム A(1、

2）＝（100、200)、チーム B（1、2）＝（100、200）とし、この場合の P_A を計算する。各チームの出場順序は①チーム A（1→2)、チーム B（1→2）②チーム A（1→2)、チーム B（2→1）の 2 パターン分析する。

①の場合、

$$P_A = \frac{100}{100+100}\frac{100}{100+200}$$
$$+\frac{100}{100+100}\frac{200}{100+200}\frac{200}{200+200}$$
$$+\frac{100}{100+100}\frac{200}{200+100}\frac{200}{200+200}$$
$$=\frac{1}{2}$$

となる。②の場合、

$$P_A = \frac{100}{100+200}\frac{100}{100+100}$$
$$+\frac{100}{100+200}\frac{100}{100+100}\frac{200}{200+100}$$
$$+\frac{200}{100+200}\frac{200}{200+200}\frac{200}{200+100}$$
$$=\frac{1}{2}$$

となる。利得表は

		B	
A		1→2	2→1
	1→2	0.5、0.5	0.5、0.5
	2→1	0.5、0.5	0.5、0.5

表 1 2 人勝ち抜き戦における利得表
チーム A、B（1、2）＝（100、200）

となり、勝ち抜き戦におけるチームの勝利確率は選手の出場順序に依存しないという加藤（2012）の結果を再現することができた。

4.3 疲労パラメーターを導入

今節では、前節の先行研究の再現に疲労パラメーターを導入し、先行研究に疲労を加味した条件下での分析を行う。まず、本研究の核となる疲労パラメーターについての説明をする。

疲労パラメーター

疲労パラメーターとは 1 回戦うとその選手の強さが減少する度合いを表す。例えば、疲労パラメーターの数値が 0.9 とは、1 回戦うと疲労によりその選手の強さが 10%減少することを示す。(例:疲労パラメーターの数値が 0.9 で、戦力 100 の選手が 1 試合勝利後、2 試合目での戦力 $100 * 0.9 = 90$ ）

以下では、疲労パラメーターの数値を 0.9 としてチーム A の勝率を計算し直す。

①の場合、

$$P_A = \frac{100}{100+100}\frac{100*0.9}{100*0.9+200}$$
$$+\frac{100}{100+100}\frac{200}{100*0.9+200}\frac{200}{200+200*0.9}$$
$$+\frac{100}{100+100}\frac{200}{200+100*0.9}\frac{200*0.9}{200*0.9+200}$$
$$=\frac{1}{2}$$

となる。②の場合、

$$P_A = \frac{100}{100+200}\frac{100*0.9}{100*0.9+100}$$
$$+\frac{100}{100+200}\frac{100}{100*0.9+100}\frac{200}{200+100*0.9}$$
$$+\frac{200}{100+200}\frac{200}{200+200*0.9}\frac{200*0.9}{200*0.9+100}$$
$$=\frac{5837}{11571}$$

となる。よって、利得表は以下のように修正される。

		B	
A		1→2	2→1
	1→2	0.5、0.5	0.504、0.496
	2→1	0.496、0.504	0.5、0.5

表 2 疲労パラメーター（0.9）を考慮したときの利得表

チーム A、B（1、2）＝（100、200）

ナッシュ均衡は（A の戦略、B の戦略）＝（1→2、1→2）である。さらに A、B の 2 人にとって、（1→2）は（2→1）を強支配していることが分かる。このように疲労を加味した条件下では、後ろに強い選手を配置した戦略を選択した方が勝率が高くなることを確認することができた。

次に、上記のような結論がどの程度一般的に成立するのかを明らかにするため、疲労パラメーターの数値を変化させた。具体的に説明すると、 0.05 から 0.95 までを 0.05 刻みに変化させた。図 1 が各疲労パラメーターにおける②でのチーム A の勝率を表している。縦軸が P_A、横軸が疲労パラメーターである。図 1 より、P_Aが 0.5 を下回るのは疲労パラメーターが 0.35 以下のときであり、疲労パラメーターが 0.35 より上の非常に広い範囲において P_Aは 0.5 以上であることが確認された。つまり、強い選手を後ろに配置する（1→2）戦略が最適であるという結果が、広い範囲で成立しているといえる。

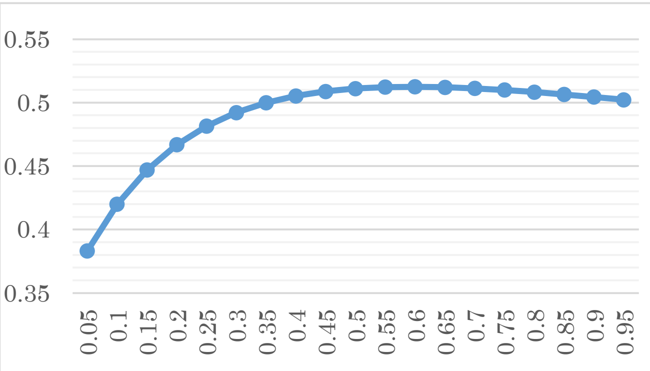

図 1 各疲労パラメーターにおける、チーム A、B（1、2）＝（100、200）、チーム A（1→2）、チーム B（2→1）でのチーム A の勝率

（縦軸：A の勝率、横軸：疲労パラメーター）

上記の結果は、戦力を（弱い選手、強い選手）＝（100、200）という仮定のもとでの計算である。それゆえ、チーム内の選手の戦力の格差の程度を変えて行った時に、結果がどのように変化しうるかを確かめる。そのために、弱い選手の戦力を 100 で固定したまま、強い選手の強さを 150 から 1000 まで 50 刻みで動かした。疲労パラメーターについては、0.3 、0.5 、 0.7 、 0.9 の 4 ケースを考慮した。

図 2 が計算結果である。これより、図 1 と同様に、幅広い範囲で選手の戦力が弱い→強いの戦略をとることが最適になることが分かった。さらには、チーム内格差が大きければ大きいほど、大将に強い選手を置くことによる勝率が高くなることが分かった。より具体的には、疲労度が小さいほど P_Aの変化も小さく、疲労パラメーターが 0.3 のとき、強い選手の強さが 250 以下になると P_Aが 0.5 を下回り、前に強い選手を配置した戦略、強い→弱いの出場順序の方が勝率が高くなることが分かった。

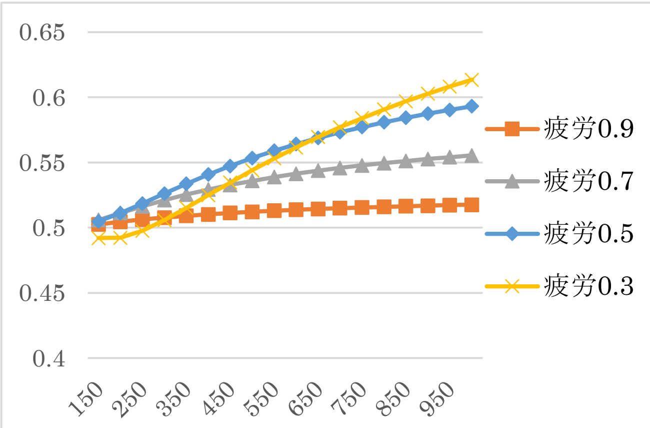

図 2 選手の強さの格差と各疲労パラメーターを考慮した場合のチーム A の勝率

（縦軸：チーム A（1→2）、チーム B（2→1）のときのチーム A の勝率、横軸：強い選手の強さ）

加藤（2012）のモデルに 2 人勝ち抜き戦では疲労パラメーターを導入してみると、強い選手を後にするという戦略（弱い→強い）が強い選手を前にする戦略（強い→弱い）を広い範囲で支配していた。また、疲労パラメーターの数値を変化させたり、選手 2 人の強さの格差を広げたところ、どちらにおいても広い範囲で選手の戦力が弱い→強いの出場順序が最適となった。

5. 3 人勝ち抜き戦

5.1 3 人勝ち抜き戦での勝率の計算方法

この章では 2 人勝ち抜き戦と同様に *BT* モデルを用いて、2 チーム間各チーム選手 3 人の 3 人勝ち抜き戦での勝利確率および選手の最適出場順序について分析する。選手が 3 人に

増えた事で M=3、N=3 となり、各チームのオーダーはそれぞれ 3!＝6 通りである。

1. (1→2→3)
2. (1→3→2)
3. (2→1→3)
4. (2→3→1)
5. (3→1→2)
6. (3→2→1)

また、各チームの選手それぞれの戦力をチーム A（1、2、3）＝（100、150、200）、チーム B（1、2、3）＝（100、150、200）とする。今節では例として疲労パラメーターは考えず（疲労パラメーターの数値が 1.0 ）、各チームの選手の出場順序がチーム A（1→2→3)、チーム B（1→3→2）のケースで勝率の計算方法について説明する。チーム A が勝ったときを W、負けたときを L、また、左から試合順に勝敗の結果を記述する。（例：チーム A が 2 連勝後 1 敗、その後 1 勝してチーム A が勝つ場合の結果→ WWLW ）チーム A が勝利するケースは、

1. WWW
2. WWLW
3. WLWW
4. LWWW
5. WWLLW
6. WLWLW
7. WLLWW
8. LWWLW
9. LWLWW
10. LLWWW

の 10 通りである。したがって、チーム A の勝利確率 P_A は次の計算で求まる。

$$
\begin{aligned}
P_A =& \frac{100}{100+100}\frac{100}{100+200}\frac{100}{100+150} \\
&+\frac{100}{100+100}\frac{100}{100+200}\frac{150}{100+150}\frac{150}{150+150} \\
&+\frac{100}{100+100}\frac{200}{100+200}\frac{150}{150+200}\frac{150}{150+150} \\
&+\frac{100}{100+100}\frac{150}{150+100}\frac{150}{150+200}\frac{150}{150+150} \\
&+\frac{100}{100+100}\frac{100}{100+200}\frac{150}{100+150}\frac{150}{150+150}\frac{200}{200+150} \\
&+\frac{100}{100+100}\frac{200}{100+200}\frac{150}{150+200}\frac{150}{150+150}\frac{200}{200+150} \\
&+\frac{100}{100+100}\frac{200}{100+200}\frac{200}{150+200}\frac{200}{200+200}\frac{200}{200+150} \\
&+\frac{100}{100+100}\frac{150}{150+100}\frac{150}{150+200}\frac{150}{150+150}\frac{200}{200+150} \\
&+\frac{100}{100+100}\frac{150}{150+100}\frac{200}{150+200}\frac{200}{200+200}\frac{200}{200+150} \\
&+\frac{100}{100+100}\frac{100}{150+100}\frac{200}{200+100}\frac{200}{200+200}\frac{200}{200+150} \\
=& \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

また、チーム A のオーダー数 6 × チーム B のオーダー数 6＝36 なので、残りの 35 ケースでも同様にチーム A の勝率計算を行ったところ、チーム A の勝率はすべてのケースで 0.5 となった。他のケースの計算式については同様であるため割愛する。このように 3 人勝ち抜き戦の場合においても、加藤（2012）の結果である勝ち抜き戦におけるチームの勝利確率は選手の出場順序に依存しないということが維持されることを確認できた。

5.2 疲労パラメーターを導入

今節では前節で示した例を踏まえて 3 人勝ち抜き戦に疲労パラメーターを導入して再計算を行う。例えば、チーム A、B（1、2、3）＝（100、150、200)、疲労パラメーターの数値が 0.9 、戦略がチーム A（1→2→3)、チーム B（1→3→2）のケースのチームAの勝率を計算すると 0.501589 と求められる。計算式は非常に長くなるので、本文ではなく付録に掲載する。すべての 36 ケースで勝率を計算すると、以下の利得表を得ることができる。

	1→2→3	1→3→2	2→1→3	2→3→1	3→1→2	3→2→1
1→2→3	0.5	0.501589	0.500258	0.504	0.502365	0.504567
1→3→2	0.498411	0.5	0.499017	0.50266	0.501418	0.503515
2→1→3	0.499742	0.500983	0.5	0.503115	0.50154	0.503432
2→3→1	0.496	0.49734	0.496885	0.5	0.499092	0.500882
3→1→2	0.497635	0.498582	0.49846	0.500908	0.5	0.501487
3→2→1	0.495433	0.496485	0.496568	0.499118	0.498513	0.5

表 3 疲労 0.9 のときのチーム A の勝率

チーム A、B（1、2、3）＝（100、150、200）

表については各列の一番勝率が大きいマスを色付けして示した。これより、疲労パラメーターが 0.9 のとき、チーム B の戦略に関わらず、チーム A は弱い順の戦略が良いことが分かる。つまり、（1→2→3）が支配戦略である。

次に疲労パラメーターが他の数値の時を確認する。疲労パラメーターは 0.8 から 0.1 まで 0.1 刻みでそれぞれ計算を行った。結果は表 4、5 と付録に示した。

	1→2→3	1→3→2	2→1→3	2→3→1	3→1→2	3→2→1
1→2→3	0.5	0.504998	0.496223	0.508386	0.496051	0.503542
1→3→2	0.495002	0.5	0.494219	0.504878	0.497345	0.503386
2→1→3	0.503777	0.505781	0.5	0.507234	0.495124	0.500461
2→3→1	0.491614	0.495122	0.492766	0.5	0.495124	0.499157
3→1→2	0.503949	0.502655	0.504876	0.504876	0.5	0.501206
3→2→1	0.496458	0.496614	0.499539	0.500843	0.498794	0.5

表 4 疲労 0.5 のときのチーム A の勝率

チーム A、B（1、2、3）＝（100、150、200）

	1→2→3	1→3→2	2→1→3	2→3→1	3→1→2	3→2→1
1→2→3	0.5	0.500956	0.456338	0.461898	0.427481	0.431908
1→3→2	0.499044	0.5	0.459451	0.457852	0.432105	0.429622
2→1→3	0.543662	0.538102	0.5	0.50106	0.465446	0.469266
2→3→1	0.538102	0.572519	0.49894	0.5	0.471081	0.468283
3→1→2	0.572519	0.567895	0.534554	0.528919	0.5	0.498915
3→2→1	0.568092	0.570378	0.530734	0.531717	0.501085	0.5

表 5 疲労 0.1 のときのチーム A の勝率

チーム A、B（1、2、3）＝（100、150、200）

疲労パラメーターの数値が小さい（1 戦ごとの消耗が激しい）時ほど、強い選手を先に出す出場順序が好ましくなることを読み取ることができる。その一方で、疲労パラメーターが 1 に近いときには、強い選手を後ろに配置するという出場順序が支配戦略となる。実際、疲労パラメーターを 0.01 刻みで分析してみたところ、疲労パラメーターが 0.82 以上では常に、チーム A は強い選手を後ろに配置する（1→2→3）という戦略が支配戦略であった。また、対称ナッシュ均衡は疲労パラメーターの数値によって変化した。疲労パラメーターの推移による支配戦略、対称ナッシュ均衡については図 3 で示した。

図 3 疲労パラメーターの推移による支配戦略と対称ナッシュ均衡

チーム A、B（1、2、3）＝（100、150、200）

上記の結果は、選手の強さをチーム A（1、2、3）＝（100、150、200）、チーム B（1、2、3）＝（100、150、200）という仮定のもとでの計算であった。それゆえあらゆるケースを考察するために、チーム内の選手の戦力の差を広げた場合には結果がどのように変化しうるかを確かめる。今回確かめた選手の戦力はチーム A（1、2、3）＝（100、250、400）、チーム B（1、2、3）＝（100、250、400）とチーム A（1、2、3）＝（100、450、800）、チーム B（1、2、3）＝（100、450、800）の 2 ケースである。まず、チーム A、B（1、2、3）＝（100、250、400）の場合、疲労パラメーターが 0.87 以上のとき、強い選手を後ろに配置する（1→2→3）という出場順序が支配戦略である。また、チーム A、B（1、2、3）＝（100、450、800）の場合では、疲労パラメーターが 0.9 以上のとき、同様に（1→2→3）が支配戦略となった。3 人の選手の戦力の差が広がれば広がるほど、支配戦略が生まれる疲労パラメーターの数値も大きくなることが分かった。

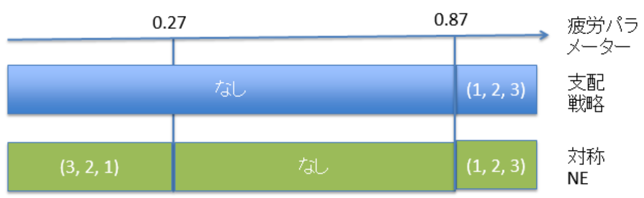

図 4 疲労パラメーターの推移による支配戦略と対称ナッシュ均衡

チーム A、B（1、2、3）＝（100、250、400）

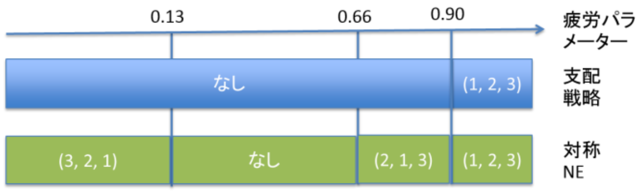

図 5 疲労パラメーターの推移による支配戦略と対称ナッシュ均衡

チーム A、B（1、2、3）＝（100、450、800）

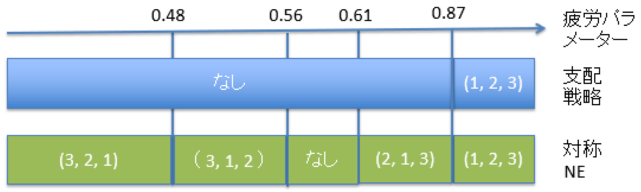

図 7 疲労パラメーターの推移による支配戦略と対称ナッシュ均衡

チーム A、B（1、2、3）＝（100、120、200）

今までの 3 人勝ち抜き戦で考察したケースは、各選手の戦力の幅が均等であり、両チームの選手の戦力も同じであった。しかし、一般的には選手の戦力の幅が均等であるケースや各チームの選手の戦力が同じケースが見られる事はほぼ無いに等しいと考える。そこで、ここからは 3 人勝ち抜き戦において、一般的に見られるであろうケースを確認する。まず、強さが真ん中の選手、いわゆる選手 2 を強い側（選手 3 側）、弱い側（選手 1 側）へとそれぞれ近づけ、強い選手が 2 人のケース、弱い選手が 2 人のケースという 3 人勝ち抜き戦で一般的に見られそうなケースでの計算を行う。

今回、強い選手が 2 人のケースをチーム A（1、2、3）＝（100、180、200）、チーム B（1、2、3）＝（100、180、200）、弱い選手が 2 人のケースをチーム A（1、2、3）＝（100、120、200）チーム B（1、2、3）＝（100、120、200）とした。後に図としても示すが、結果として強い選手が 2 人のケースだと、疲労パラメーターが 0.74 以上で（1→2→3）が支配戦略、弱い選手が 2 人のケースだと、 0.87 以上で（1→2→3）が支配戦略であった。

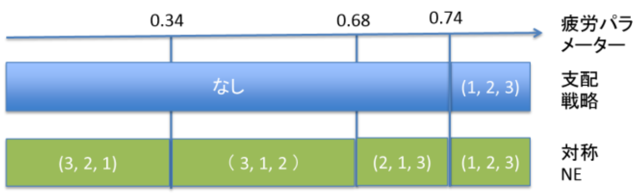

図 6 疲労パラメーターの推移による支配戦略と対称ナッシュ均衡

チーム A、B（1、2、3）＝（100、180、200）

次に、3 人勝ち抜き戦で一般的に見られそうな前述と異なるケースとして、チーム A とチーム B の選手の戦力が異なるケースでの計算を行う。具体的には、チーム A の選手の戦力を（1、2、3）＝（100、150、200）で固定し、チーム B の選手の戦力を①（1、2、3）＝（50、75、100）という選手の戦力がチーム A の半分のケース、②チーム B（1、2、3）＝（200、300、400）という選手の戦力がチーム A の 2 倍のケース、③チーム B（1、2、3）＝（300、450、600）という選手の戦力がチーム A の 3 倍のケースの 3 ケースの計算を行った。まず、①のチーム B（1、2、3）＝（50、75、100）のケースで疲労を考えないとき（疲労パラメーターが 1.0）は、チーム A の勝率は 0.783983 となり、8 割弱の勝率であった。また、チーム A の勝率は疲労パラメーターの数値で変化したが、どの場合でも 7 割弱から 8 割弱になった。次に、②の選手の強さがチーム A の 2 倍のケースでは、疲労パラメーターの数値が同じとき、①の逆（1－②＝① 例えば、疲労パラメーターが 0.9 で①、②の両ケースともチーム A、B（1→2→3）の戦略をとるとき、 1－0.216647＝0.7783353 となる 付録 8、9 参照）になることが分かった。そして、①、②、③すべてで共通してチーム A には（1→2→3）が支配戦略になるときが存在しており、選手の出場順序が強い選手を後ろに配置する戦略が支配戦略となることが、この 3 ケースでも確認できた。また、この 3 ケースの疲労パラメーターの数値が 0.9～0.1 まで 0.1 刻みで計算した利得表については付録に掲載する。

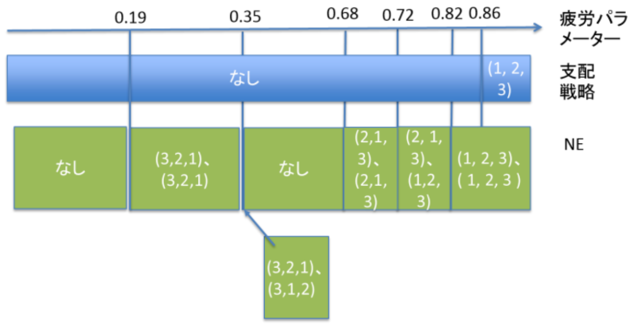

図 8 疲労パラメーターの推移による支配戦略とナッシュ均衡

チーム A（1、2、3）＝（100、150、200）チーム B（1、2、3）＝（50、75、100）

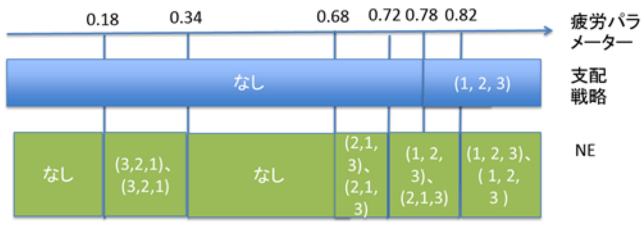

図 9 疲労パラメーターの推移による支配戦略とナッシュ均衡

チーム A（1、2、3）＝（100、150、200）チーム B（1、2、3）＝（200、300、400）

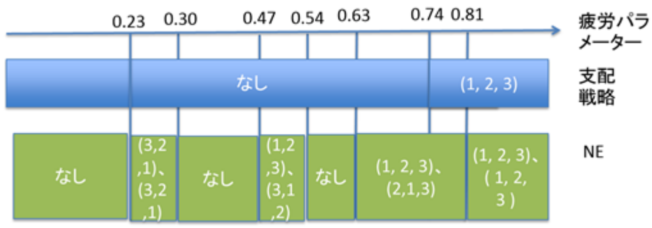

図 10 疲労パラメーターの推移による支配戦略とナッシュ均衡

チーム A（1、2、3）＝（100、150、200）チーム B（1、2、3）＝（300、450、600）

3 人勝ち抜き戦では選手の戦力と疲労パラメーターの数値のそれぞれの値を変化させ、様々なパターンを試したが、疲労パラメーターの数値が 1 に近いときに、（1→2→3）が支配戦略になるという傾向については変わりなかった。また、3 人勝ち抜き戦において本研究で試した様々なパターンのすべてで、チーム A、B とも疲労パラメーターの数値によって（1→2→3）、（2→1→3）、（3→1→2）、（3→2→1）の 4 つの戦略を使い分けることがゲーム理論的に望ましいことが分かった。これらの結果から、現実の 3 人勝ち抜き戦において、大将に一番強い人を持ってくる、先鋒に強い人を持ってくる、などの勝ち抜き戦での定石のようなものがゲーム理論的にも望ましいことを確認することができた。

次の 6 章では 2 人勝ち抜き戦、3 人勝ち抜き戦の結果を踏まえ、5 人勝ち抜き戦の考察を行う。

6. 5 人勝ち抜き戦

6.1 5 人勝ち抜き戦での勝率の計算方法

この章では 2 人勝ち抜き戦、3 人勝ち抜き戦と同様に *BT* モデルを用いて、2 チーム間各チーム選手 5 人の 5 人勝ち抜き戦での勝利確率および選手の最適出場順序について分析する。選手が 5 人に増えた事で M=5、N=5 となり、各チームのオーダーは 5!＝120 通り存在する。各チームのオーダーはそれぞれ、

1. （1→2→3→4→5）
2. （1→2→3→5→4）
3. （1→2→5→3→4）

・

・

・

118. （5→4→2→3→1）
119. （5→4→3→1→2）
120. （5→4→3→2→1）

である。また、チーム A が勝利するケースは

1. WWWWW
2. WWWWLW
3. WWWLWW

・

・

・

124. LLWLLWWWW
125. LLLWLWWWW
126. LLLLWWWWW

の 126 通り存在する。チーム A（1、2、3、4、5）＝（100、200、300、400、500）、チーム B（1、2、3、4、5）＝（100、200、300、400、500）で、疲労パラメーターは考えない（疲労パラメーターの数値が 1.0）としてチーム A の勝利確率 P_A を求めると、チーム A のオーダー数 120 × チーム B のオーダー数 120 = 14,400 すべてのケースで 0.5 になり、5 人勝ち抜き戦においても加藤（2012）の結果、勝ち抜き戦におけるチームの勝利確率は選手の出場順序に依存しないということを確認することができた。計算式、利得表においても長すぎて掲載することが不可能なため本文では割愛し、付録に掲載する。

6.2 疲労パラメーターを導入

2 人勝ち抜き戦、3 人勝ち抜き戦同様に今節では 5 人勝ち抜き戦に疲労パラメーターを導入しての計算を行う。まず、結果を述べると疲労パラメーターを導入した 5 人勝ち抜き戦では、支配戦略およびナッシュ均衡を発見することができなかった。したがって、5 人勝ち抜き戦では 2 人勝ち抜き戦、3 人勝ち抜き戦とは少し別の視点からの考察を行う。具体的にはマクシミン戦略の視点からの考察を行う。まず、マクシミン戦略の説明をする。以下の定義については船木（2012, pp47-53）を参考。

マクシミン原理（*maximin principle*）

プレイヤーが慎重な行動基準をとるとする。それは、プレイヤー自身が自分のとる選択に応じて、その時に起こり得る最悪なケースを考慮し、その中でも最大の利潤を得ることができる選択をとる行動であり、この行動はマクシミン行動と呼ばれる。

プレイヤー自身のとる戦略に対する最小の利得をその戦略の保証水準と呼ぶ。マクシミン行動に対応する戦略はこの保証水準を最大にする戦略であり、これをマクシミン戦略（*maximin strategy*）と呼ぶ。また、その時、マクシミン戦略によって与えられる保証水準の最大値をマクシミン値（*maximin value*）と呼ぶ。

$$min_{t\in s2}f(s^a,t) = max_{s\in s1}min_{t\in s2}f(s,t)$$

上の式を満たす戦略 s^a をマクシミン戦略と呼び、その時、上の式が与える値をマクシミン値と呼ぶ。

では、これよりマクシミン戦略を用いて、5 人勝ち抜き戦の考察を行う。チーム A（1、2、3、4、5）＝（100、200、300、400、500）、チーム B（1、2、3、4、5）＝（100、200、300、400、500）とし、疲労パラメーターの推移によるその時々のマクシミン戦略を計算した。具体的には疲労パラメーターの数値を 0.01 刻みで変化させ、疲労パラメーターが 0.99～0.01 までの計算を行った。

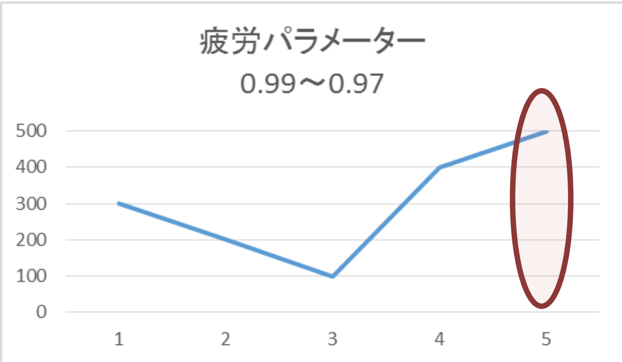

図 11 **疲労パラメーターの推移による 5 人勝ち抜き戦の出場順序**（縦軸：選手の強さ、横軸：出場順番）

チーム A、B（1、2、3、4、5）＝（100、200、300、400、500）

疲労パラメーターが 0.99～0.43 までの非常に広い範囲において、図 11 のように一番戦力が大きい選手（選手 5）を一番後ろに置く戦略、いわゆる選手 5 を大将にする戦略が望ましい結果となった。次に、疲労パラメーターの数値が 0.42～0.36 の範囲では、選手 5 は先鋒にも大将にもならない戦略、（4→5→3→1→2）のみが望ましいという結果になった。最後に、疲労パラメーターの数値が 0.35～0.01 の中々広い範囲においては、選手 5 を先鋒にする図 12 のような戦略が望ましい結果となった。残りの疲労パラメーターの推移によるマクシミン戦略は、付録に掲載した。

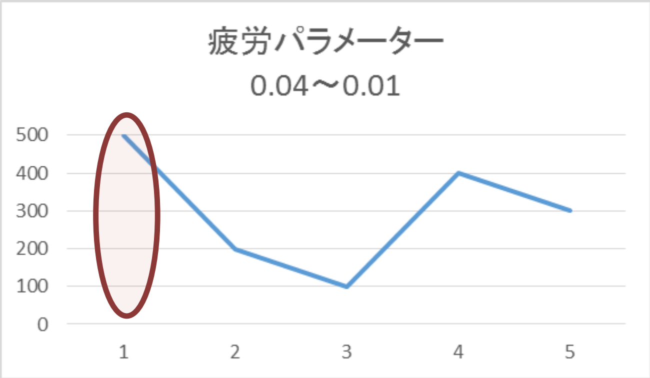

図 12 **疲労パラメーターの推移による 5 人勝ち抜き戦の出場順序**（縦軸：選手の強さ、横軸：出場順番）

チーム A、B（1、2、3、4、5）＝（100、200、300、400、500）

5 人勝ち抜き戦は、本研究で支配戦略、ナッシュ均衡とも見つける事ができなかった。しかし、マクシミン戦略の観点から考察すると 5 人勝ち抜き戦においても、疲労パラメーターの推移によって、大将に一番戦力が大きい選手を置く戦略、または先鋒に一番戦力が大きい選手を置く戦略がゲーム理論的に望ましい結果となった。また、この結果から現実で見られる定石のような戦略が 5 人勝ち抜き戦においてもゲーム理論的に望ましいことを確認する事ができた。

7.　結論

疲労パラメーターを導入した 2 人勝ち抜き戦、3 人勝ち抜き戦、5 人勝ち抜き戦のすべてにおいて、広い範囲で大将に戦力が一番大きい選手を置く戦略、または先鋒に戦力が一番大きい選手を置く戦略を選択することがゲーム理論的に望ましい結果となった。このことから現実で一般的に見られる大将に一番強い選手を置く戦略、先鋒に一番強い選手を置く戦略といった定石のような戦略については 2 人勝ち抜き戦、3 人勝ち抜き戦、5 人勝ち抜き戦においてゲーム理論的に有効だと言える。

また、本研究では疲労パラメーターを導入した 5 人勝ち抜き戦において、支配戦略およびナッシュ均衡を発見することができなかった。このことについては、本研究では全ての計算を Excel および Excel のマクロ機能で行ったことが原因である可能性がある。3 人勝ち抜き戦までの計算で生じた小数点第一位以下の桁数には Excel は対応することができたが、5 人勝ち抜き戦の計算で生じた小数点第一位以下の桁数には対応することができなかったことが支配戦略、ナッシュ均衡を見つけることができなかった原因と考える。疲労パラメーターを導入した 2 人勝ち抜き戦、3 人勝ち抜き戦の結果から想像するに、疲労パラメーターを導入した 5 人勝ち抜き戦においても支配戦略およびナッシュ均衡は存在すると考えるのが自然なように思える。よって、今後、より計算力のあるソフト（例えば *Mathematica* や *MATLAB*）を使用することにより、5 人勝ち抜き戦の場合にも支配戦略、ナッシュ均衡が存在することを確認できるようになると期待する。

最後になりますが、本論分を作成するにあたり、丁寧かつ熱心なご指導をいただいた指導教官の上條 良夫教授に心から感謝致します。また、本研究での議論を通じて多くの知識や示唆を頂いた上條研究室の同期の一幡 政宏氏、徳本 誉氏にも感謝致します。

参考文献

[1]加藤直樹　「団体戦の最適出場順序に関する数理的考察」（2012)、オペレーションズ・リサーチ 57、21-26

[2]岡田章（2008)『ゲーム理論･入門』、有斐閣

[3]船木由喜彦（2012)『ゲーム理論講義』、新世社