芸術にみる数理

1180470 橋田敬
高知工科大学マネジメント学部

2018 年 3 月 13 日

1　はじめに

現代の中等教育における数学教育は、初等教育と高等教育との橋渡しとしての機能を有しており、国内の高等学校進学率は 98 %、大学進学率は 54.3 %を達成している。とりわけ大学入試においては、一般入試だけでなく推薦・AO 入試の充実により多様な生徒を進学させられるようになった。

しかしながら、普段の数学の授業においては、与えられた定義や公式を用いて、与えられた練習問題を解くという、形式的な作業になっている。ポール・ロックハートによると、そのような「偽の数学」による弊害として、高校あるいは大学を卒業して以来、日常生活において数学を利用する人が滅多にいないほどに数学に対する理解はされていないこと、生徒たちが自分自身で美しいパターンを発見する機会を奪っていることなどが挙げられる。ロックハートの唱える真の数学とは、説明のアートであって、美しく意味のあるアイディアを創り出すことこそが目的であり、数学が社会や物理学などの学問の役に立つということは、あくまで結果でしかない。

芸術作品に対して数学という言語でもって読み解くということは、それだけで面白い試みである。また芸術は直接に何かの役に立つことはないが、我々はそこに表現された何かを感じ取るのであって、それだけで意味深いものである。数学もまた直接何かの役に立つものにはなりにくいという点で芸術と類似している。だからこそ、それらの習得には学習そのものの価値を感じやすい。「生きる力」が求められる現代において、このことは示唆に富むものである。

本稿では、感性的で意味深く複雑な芸術作品のよさを、数学の一分野である群論を用いて説明することで、真の数学のよさを表現する。本稿における活動は、まさしく文部科学省が唱える数学的活動——すなわち、現代社会における複雑な事象や課題に対して、重要な要素を抽出し、数学化をしてそれを解くことで数学的解を得、それを実際の事象に還元・適用しようとする活動である。

2　序章

2.1　研究目的

西洋においては、古代ギリシャの時代から、自由になるための万人が身に着けるべき教養としてリベラル・アーツ（三学四科）を普及させてきた。具体的には文法学・修辞学・論理学の三学と、幾何学・算術・音楽・天文学の 4 科からなり、芸術と数学は古代から重要視されてきたことが窺える。現代においては、ますます学際的・多様な教養を有する人材の育成が目指されている。

対称性は、美術や建築などの芸術・デザイン分野において非常に重要な概念であり、その原理は自然界においてもよく見られる。数学の一分野である群論は、対称性の原理を明瞭に記述できる言語である。

本稿では、群論の学習を通して、芸術作品のよさを数理的に説明することを目的とする。

2.2　研究方法

具体的な造形作品について、群論を用いて、対称性という観点から作品のよさを説明することを試みる。

本稿の構成は次の通りである。まず第 3 章では対称性とは何かを概観し、第 4 章では先行研究から群論によって文様の対称性がどのように書き表せ、また単位となるモチーフを繰り返して創られる文様が 17 種類に分類できることを示す。第 5 章では実際の芸術作品に対してそのよさがどのように説明できるかを考える。著者の能力の範疇を超えないために、ここではエッシャーの作品に焦点を当てた。

3　文様の対称性

群論は、代数学の一分野であり、文様の対称性を記述できる。本稿では、平面の作品に関して、様々な群作用を考え、その関係から作品が数学的にどのような性質を持つかということを調べる。

文様について、形の対称性とは、鏡映（左右反転）や回転

といった、ある操作をしたとき、もとの文様と同じ形をしていることをいう。

対称性には、次のようなものがある：

- 鏡映対称：左右対称。基準となる線に関して模様を反転しても、形が変わらない。例）蝶、フルール・ド・リスなど

(https://matome.naver.jp/odai/21416203426071055-01/2141620452509942103 より引用)

(https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%83-%AB%E3%83%BC%E3%83%AB%E3%83%BB%E3-%83%89%E3%83%BB%E3%83%AA%E3%8%B9 より引用)

- 回転対称：基準となる点に関して何度か回転しても、形が変わらない。例）スワスチカ、巴紋など

(https://ameblo.jp/peo-momozo/entry-12347257598.html より引用)

(https://blog.goo.ne.jp/gemi2011/e/53293a5d1bada-a87cb6169465df853a3 より引用)

- 並進対称：平行移動対称。模様を一定方向に平行移動しても、形が変わらない。例）チェック模様など

(https://howto.clip-studio.com/library/page/view-/clipgeneral_tone_02_002 より引用)

- すべり鏡映：鏡映と回転あるいは平行移動を組み合わせた対称性。例）サインカーブなど

(https://oae.tus.ac.jp/mse/taikenkan/event/287.html より引用)

- 拡大・縮小対称：模様を拡大あるいは縮小しても形が変わらない。例）シダの葉など

(https://www.photolibrary.jp/img245/159327_187-3418.html より引用)

本稿では、これらのうち鏡映対称、回転対称、並進対称、すべり鏡映の 4 つを扱う。

4　群論と対称性

2 次元座標空間 $\mathbb{R}^2$ の点 $P(x, y)$ と 2 次元ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同一視する。ベクトル $\vec{x}$ の大きさを $\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ で定義する。

定義　写像 T について、2 次元座標空間の変換 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が合同変換であるとは

$$\|T(\vec{x}) - T(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことをいう。

言い換えると、合同変換とは大きさと形を変えない変換である。明らかに、上記 4 つの対称性は合同変換である。逆に、文様の合同変換は上記 4 つのみである。

合同変換において、鏡映は最も基本的なものであり、他の合同変換は何種類かの鏡映の合成として表せる。

m を直線 l に関する鏡映とする。点 P が l 上にあるとき、$m(P)=P$ となり、l 上にないとき、$m(P)\neq P$ であり、$m(P)$ は l が 2 点を結ぶ線分の垂直二等分線になるような点である。

また、その合成について $m^2=\mathrm{id}$ が成り立つ。ここで id は恒等変換を表す。

2 種類の鏡映の合成を考える。それぞれの鏡映軸の位置関係は交わる場合と平行である場合のどちらかである。

1. 2 軸が交わるとき、回転になる。
2. 2 軸が平行なとき平行移動になる。

3 種類の鏡映の合成には、すべり鏡映がある。

命題　T を合同変換とすると、直交行列 A とベクトル $\vec{b}$ が定まって

$$T(\vec{x})=A\vec{x}+\vec{b} \tag{1}$$

と表すことができる。

定義　G を集合とする。任意の $a,b\in G$ に対して $a*b\in G$ が定まり、次が成り立つとき、$(G,*)$ は群であるという。

1. $a,b,c\in G$ に対して $(a*b)*c=a*(b*c)$。
2. 1 つの元 $e\in G$ が存在して、すべての $a\in G$ に対して $a*e=e*a=a$。この e を G の単位元という。
3. $a\in G$ に対して、$a*b=b*a=e$ を満たす $b\in G$ が存在する。この b を a の逆元という。

合同変換全体は、写像の合成を積として群をなす。合同変換は全単射であることに注意する。

$$G=\{T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2|T\text{ は合同変換 }\}$$

とおくと、G は群をなす。これを合同変換群という。

G のうち、複数の方向の平行移動を含む離散部分群を壁紙群という。

群論において回転や鏡映を表す際に重要となる群を紹介する。

- 巡回群　不動点を中心とする角 $\frac{2\pi}{n}$ の回転を ρ とすると、

  $$C_n=\{\rho^k|k=0,1,2,\cdots,n-1\}$$

  とかける群ができる。これを n 次巡回群という。単位元は $\rho^0=\mathrm{id}$。

- 二面体群　n 本の鏡映軸を持つ対称性を持つものは、二面体群とよばれ、D_n とかく。n 個の鏡映をそれぞれ $\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}$ とおくと、

  $$D_n=C_n\cup\ \{\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}\}$$

  である。

(1) より、合同変換 g について、直交行列 M_g とベクトル $\vec{v_g}$ が定まって

$$g(\vec{x})=M_g\vec{x}+\vec{v_g}\ (\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^2)$$

と表すことができる。ここで、g を壁紙群の元とするとき、対応する直交行列全体は群をなす。すなわち、壁紙群 G に対して

$$O(G)=\{M_g|g\in\ G\}$$

を点群という。これは 2 次直交群の部分群である。

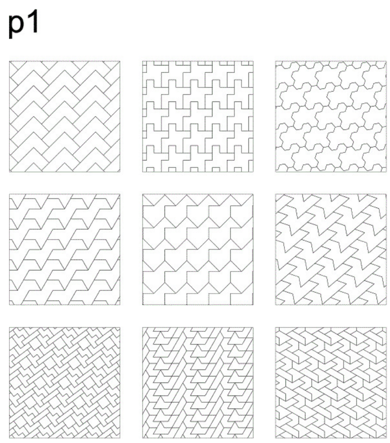
G に含まれる平行移動全体に対し、その移動ベクトル全体を G の定める格子群という。記号 $L(G)$ で表す。

$$L(G)=\{\vec{v_g}|g\in G\text{ かつ }M_g=E\}$$

鏡映軸が回転の中心を通るとき、その点を万華鏡点といい、通らないとき、その点を旋回点という。

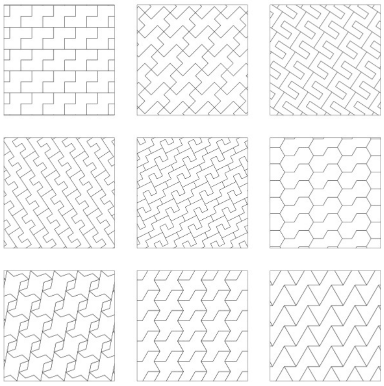
壁紙群は以下の 17 種類に分類される。以下、すべり鏡映についてはその軸が鏡映軸と交わらないような場合にのみカウントする。各例については [4] を参照した。

- $p1$ 平行移動のみからなる壁紙群、つまり格子群である。点群は C_1。



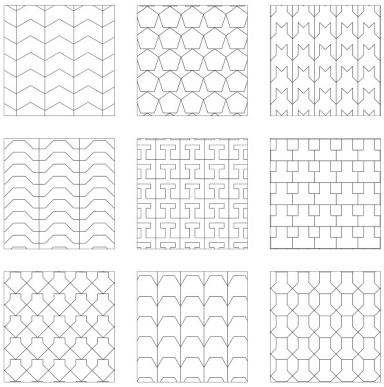
- $p2$　4 種類の半回転対称を持つ。点群は C_2。

p2



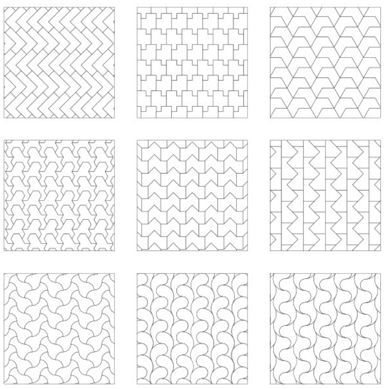
- pm　2 種類の平行な鏡映対称を持つ。点群は D_1。

pm



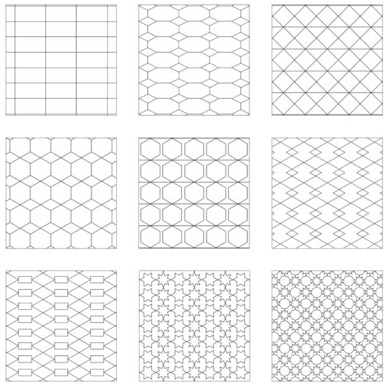
- pg　2 種類の平行なすべり鏡映を持つ。点群は D_1。

pg



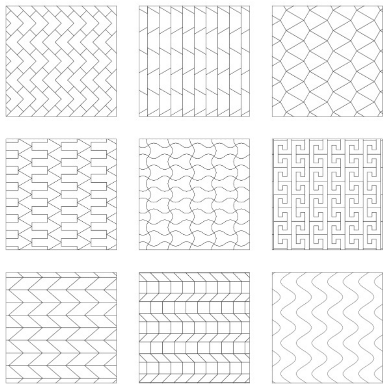
- pmm　長方形をなす 4 種類の軸を持つ鏡映と、その頂点に 4 種類の半回転の万華鏡点を持つ。点群は D_2。

pmm



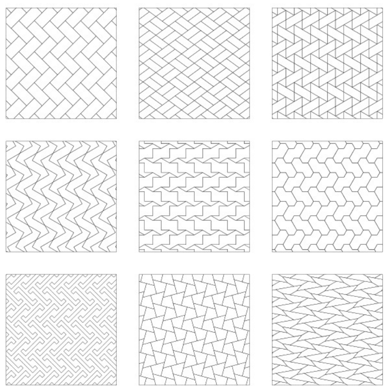
- pmg　2 種類の平行な軸に関する鏡映、2 種類の半回転対称の旋回点を持つ。点群は D_2。

pmg



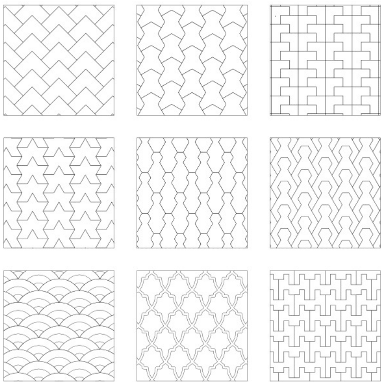
- pgg　2 種類の平行な軸に関するすべり鏡映とそれに直交する 2 種類のすべり鏡映、4 種類の半回転対称の旋回点を持つ。点群は D_2。

pgg



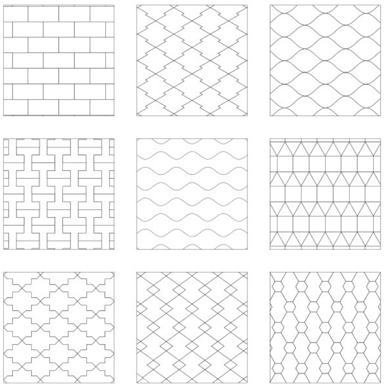
- cm　2 種類の平行な軸に関する鏡映とそれに平行な 2 種類のすべり鏡映軸を持つ。点群は D_1。

cm



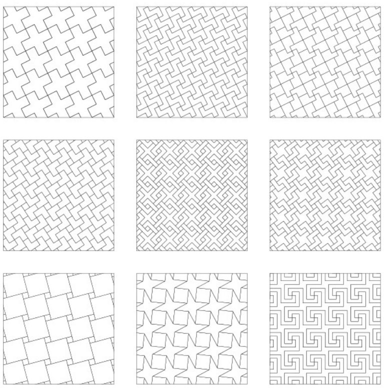
- cmm　2 種類の平行な軸に関する鏡映とそれに直交する鏡映軸が 2 種類、2 種類の半回転対称の万華鏡点、1 種類の半回転の旋回点を持つ。点群は D_2。

cmm



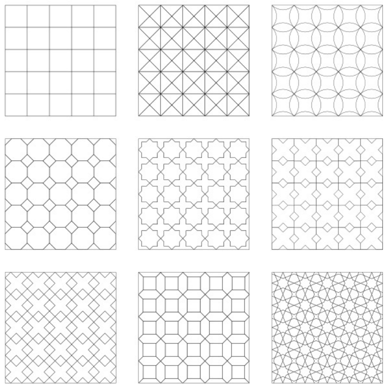
- $p4$　2 種類の $\frac{\pi}{2}$ 回転対称と 2 種類の半回転対称を持つ。点群は C_4。

p4



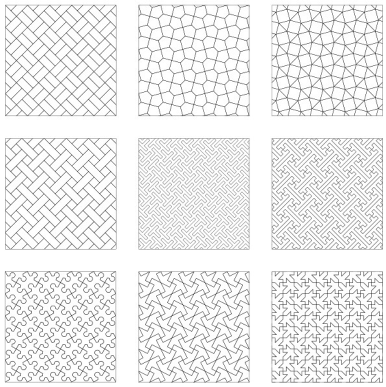
- $p4m$　正方形をなす 4 種類の鏡映軸と、その対角線がなす一回り大きな正方形をなす 2 種類の鏡映軸、2 種類の $\frac{\pi}{2}$ 回転の万華鏡点、2 種類の半回転の万華鏡点を持つ。点群は D_4。

p4m

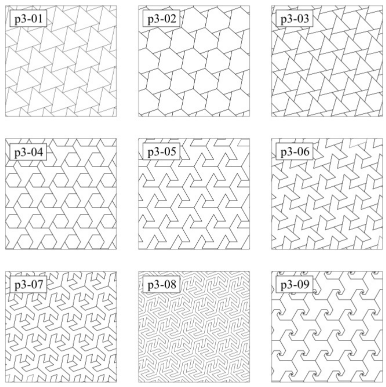


- $p4g$　正方形をなす 4 種類の軸に関する鏡映と 2 種類の半回転の万華鏡点、4 種類の $\frac{\pi}{2}$ 回転の旋回点を持つ。点群は D_4。

p4g

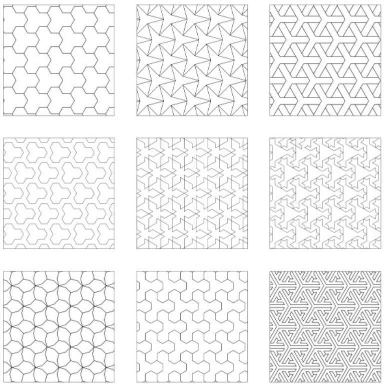


- $p3$　3 種類の $\frac{2\pi}{3}$ 回転対称を持つ。点群は C_3。



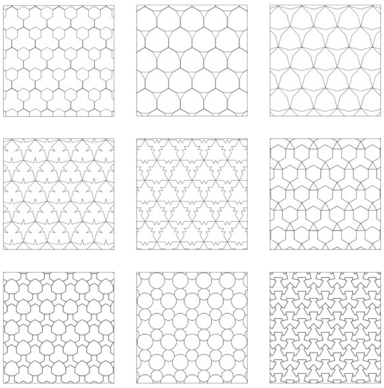
- $p31m$　正三角形をなす 3 種類の鏡映軸、1 種類の $\frac{2\pi}{3}$ 回転対称の万華鏡点、2 種類の $\frac{2\pi}{3}$ 回転対称の旋回点を持つ。点群は D_3。

p31m

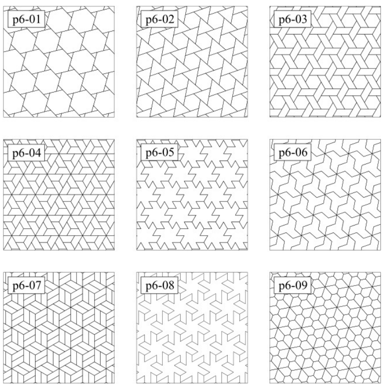


- $p3m1$　正三角形をなす 3 種類の軸に関する鏡映、その頂点に 3 種類の $\frac{2\pi}{3}$ 回転の万華鏡点をもつ。点群は D_3。

p3m1

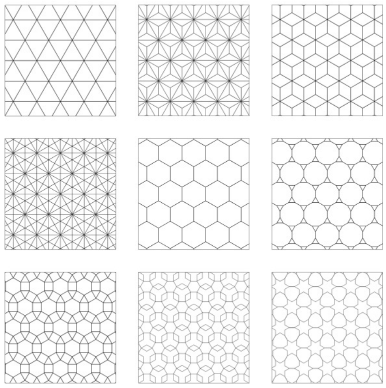


- $p6$　1 種類の $\frac{\pi}{3}$ 回転の旋回点、2 種類の $\frac{2\pi}{3}$ 回転の旋回点、3 種類の半回転の旋回点を持つ。点群は C_6。



- $p6m$ 正三角形の格子と、それを $\frac{\pi}{6}$ だけ傾けた 6 種類の軸に関する鏡映と 1 種類の $\frac{\pi}{3}$ 回転の万華鏡点、2 種類の $\frac{2\pi}{3}$ 回転の万華鏡点、3 種類の半回転の旋回点を持つ。点群は D_6。

p6m

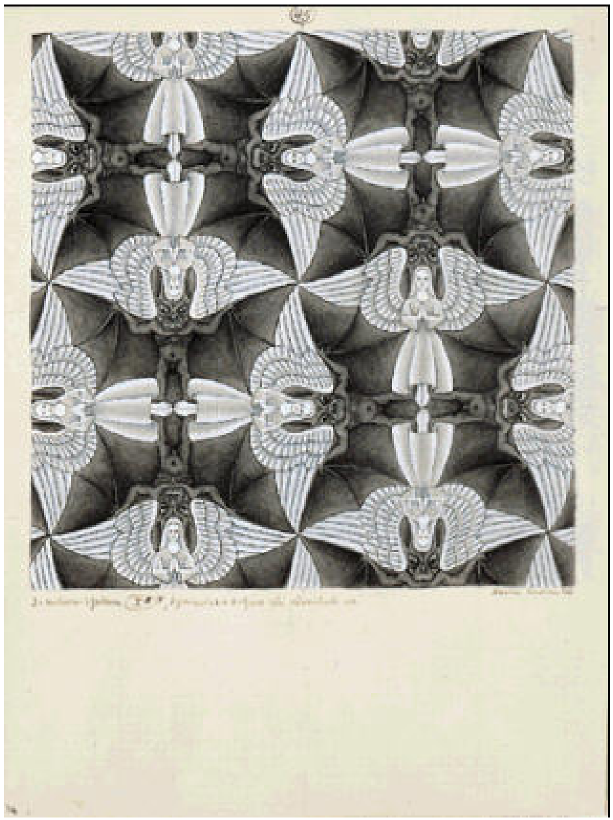


5　芸術作品の対称性

上記の論を踏まえて、ここでは具体的な芸術作品についてその文様がどのような型をしているか、という観点から作品のよさを説明することを試みる。

5.1　『天使と悪魔』

まず、M.C. エッシャー（1898〜1972）の作品を紹介する。エッシャーは、対称性に魅せられたオランダの版画家であり、本稿で考えてきたような構造の作品をいくつも残している。『天使と悪魔』は、天使と悪魔が対のモチーフとなり、$p4g$ 型の文様をなしている。半回転の万華鏡点は二体の足元に位置し、$\frac{\pi}{2}$ 回転の旋回点は翼の先端にある。



(http://www.mcescher.com/gallery/back-in-holland/no-

45-angel-devil/ より)

5.2 『Lizard(No.56)』

エッシャーの絵をもう一つ紹介する。『Lizard(No.56)』は、4 種類の半回転対称を持つ $p2$ 型文様である。三種類の色調の異なるトカゲのモチーフがあり、旋回点は各種の尻尾の先と、左前足の先にある。ただし、これは色の区別がある場合である。視点を変えて、色を区別せず形のみに注目した場合、尻尾の先の旋回点はそのままで、左前足の旋回点は $\frac{\pi}{3}$ 回転のものに取って代わる。さらに、右後ろ足の膝部分に $\frac{2\pi}{3}$ の回転対称が現れる。結果、全体として $p6$ 型の文様になる。形が同じでも、色の区別の有無によって文様の型が異なる点は興味深い。この例において、色の区別がある場合には $p2$ 文様であるから点群は C_2。一方、色の区別がない場合、全体は $p6$ 文様であるから点群は C_6。単純な対称性の数を比べれば、色の区別の無いほうが好ましいように思われる。しかし、二枚の絵のどちらが美しいかといえば、彩色されているものの方が意味深く感じる。このように、単に対称性の数が美しさの指標になるものではない。

エッシャーの作品には、モノクロの作品が多く、彩色されていても高々 4 色ほどである。それは単に彩色することによって作品に彩を持たせようとしたというよりも、彩色によって対称性という秩序が褪せてしまうことを防ごうとしたとも考えられる。もちろん、彼が作品に彩を持たせることを蔑ろにしていたなどというつもりはない。ここに、エッシャーという版画家の、見目よりも秩序や概念的な意味深さを重んじる人となりが窺える。このように、数学的な観点から作品を見たとき、作品から、作者が何を重んじ、何を表現しているかを捉えることができる。ひいては、作者の人間性をのぞき見る窓でありうるということが、作品のよさである。

(http://www.mcescher.com/gallery/back-in-holland/no-56-lizard/ より)

6 結章

エッシャーの作品に対して、規則的な文様が群論によって 17 種類に分類できるという事実から、エッシャーという人物が何を重んじて作品を創りあげたかという解釈を与えることができた。ここではエッシャーの作品のみを扱ってきたけれども、他の作品やデザイン分野においてもこの理論が有効である場合は存在する。よって、本稿で考えてきた群論という言語は、対称性を持つ作品のよさを説明できる言語足りえるという点で意味のあるものであり、そのよさを表現できた。

ここでは、エッシャーのある作品群のみを扱ってきた。平面の正則分割といわれるもののほんの一部である。平面の正則分割の作品群には、ほかにも有名な『天国と地獄』などの作品があるが、それらの作品は本稿の範疇外である。ここではユークリッド幾何学にもとづく合同変換を軸にして議論を進めてきたが、かの作品は双曲幾何学にもとづく対称性であるからだ。今後は、そのような作品を含めた二次元に限らない作品についても群論の理論が利用できるかということを学びたい。また、それらの知識を教育現場においてどのように活かせるかということも今後の課題である。

参考文献

[1] 川崎徹郎 『文様の幾何学―文様における群作用と対称性―』初版 (牧野書店, 2014)
[2] ポール・ロックハート 『算数・数学はアートだ！――ワクワクする問題を子どもたちに――』 初版 (新評論, 2016)
[3] 篠田健一 『対称性と数学――繰り返し模様に潜む幾何と代数――』初版 (技術評論社, 2016)
[4] http://j344.exblog.jp/i4/