立体三目並べにおける必勝戦略

1180484　　溝辺　恭平

高知工科大学　マネジメント学部

1. 概要

本研究は、ボードゲームにおける定理や戦術を学び、立体三目並べにおける必勝戦略を見つけ出すことを目的とする。

2. 背景

現在、加藤一二三氏や藤井聡太氏といった将棋棋士が話題をよび、いわゆる将棋ブームというものが起こっている。彼らは将棋棋士の中でもかなりの腕前であることから、メディアに引っ張りだこである。しかし、将棋をはじめとするボードゲームにおいて、強い人と弱い人の差は何なのか。どのような思考を持ち、どのような戦術を持っていればボードゲームにおいて勝率をあげることができるのか。これらの疑問を持ちはじめたことから、今回私はボードゲームにおける定理や戦術を研究することにした。また研究を始めた時、テレビのクイズ番組で立体三目並べが行われていた。これを見て、どのように手を打てば勝てるのか気になったが、番組内で戦略についての解説はなかった。そこで、立体三目並べにおける必勝法を自力で見つけ出す事にした。本研究では、ボードゲームについての研究を行い、それらの知識をもとに立体三目並べにおける必勝戦略の発見を試みる。

3. 目的

立体三目並べは、あえて数学の分野に分けるならば離散数学に当てはまる。数学的思考も持ちながら立体三目並べの必勝戦略の探求を行い、本研究を通してより多くの人にボードゲームの魅力を知ってもらいたい。

4. 離散数学とは

現代の数学は大きく分けて、

・代数学

・幾何学

・解析学

・その他（応用数学、離散数学など）

の四つの分野に分けることが出来る。

このうち、その他に含まれる離散数学とは、原則として離散的な対象を扱う数学である。離散数学の中核をなす分野として、組合せ論やグラフ理論などが挙げられる。また、学校教育の中で教えられているものには、行列、集合、順列、組合せ論理と証明、帰納法と漸化式、数列などがある。

5. 有限ゲームとは

ゲームというと、一般にはテレビゲームなどもゲームと呼ばれるが、本論文におけるゲームとは、二人のプレイヤーによって行われる古典的なボードゲームのことを指すものとする。

ゲームはいくつかの基準で分類をすることができる。まず、プレイヤーに対しゲームの状況の情報が完全に与えられているか否かという区別がある。ゲームの状況が、サイコロやカードのシャッフルなど運に依存しているか、あるいは相手のカードなどが見られず推測にしか頼れないゲームは、不完全情報ゲームと呼ばれる。逆に、プレイヤーに対してゲームの状況が情報としてすべて与えられ、自他の技量だけが勝敗を左右するゲームは完全情報ゲームと呼ばれる。例えばオセロやチェス、将棋などは完全情報ゲームである。

さらに完全情報ゲームは、有限ゲームとそうでないゲームの二種類に分けることができる。完全情報ゲームの中でも「着手の選択肢が有限である。」「ゲームが有限回の着手で決着する。」という二つの性質をもつものを有限ゲームといい、この性質のどちらか一方でも満たさないものは有限でないゲームという。例えばオセロは、ゲーム盤のマスの目の数や、置いてある石が有限であることから「着手の選択肢が有限である。」ことが分かり、ゲームの性格から有限回でルール上可能な手が無くなってしまうことから「ゲームが有限回の着手で決着する。」ことが分かる。よって、オセロは有限ゲームである。

6. ツェルメロの定理

かつて集合論などで業績を残したドイツの数学者エルンスト・ツェルメロは、有限ゲームにおける以下のような定理を発見した。

「すべての有限ゲームは、先手必勝法があるか、後手必勝法があるか、引き分けに終わるかのどれかである。」

この定理を、ツェルメロの定理という。ツェルメロの定理は抽象的な存在命題であり、必勝法や引き分けの具体的な手段を与えてくれるものではない。しかし、個々の有限ゲームに対して具体的な解決を求める試みが無意味なことでは無いということを保証してくれる。

7. ニム

ツェルメロの定理をより､引き分けのない有限ゲームには、先手か後手の必勝法がある。ここでは、その中でも特に必勝法が発見されている三山ニムというゲームを例にあげ、どのように手を打っていけば勝てるのかを解説する。

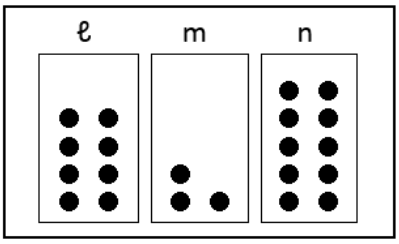

図１

7.1　ルール

１．ゲームは２人のプレイヤーで行われる。

２．各プレイヤーは、交互に１つの山から１個以上の任意の数（全部でもよい）だけ石を取る。

３．石を取る山は、毎回任意の（石の残っている）１山を選ぶ。

４．パスは許されず、最後に石を取って全ての山を空にしたものを勝ちとする。

7.2　必勝戦略

基本的なルールは上記の通りである。石の個数は各山（ℓ、m、n）個と表し、特にゲーム開始時の石の個数に制限はないが、今回は（8、3、10）個で始める。

さて、一見必勝戦略が無いようにも見えるこの三山ニムであるが、明確な必勝戦略が存在する。その必勝戦略とは、

「二進対称形にして相手に手渡すのを続けること。」

である。ではその二進対称形とは何かを解説する。現在、私たちが日常生活で一般的に使っている数は十進法で表されている。今回石の個数は（8、3、10）個であるが、8,3,10 はいずれも十進法で表された数字である。まずは、これらの数字を二進法で表記しなおすところから作業を始める。この十進法で表されている数字を二進法で表記しなおす作業を二進分解と呼ぶことにする。8、3、10 をそれぞれ二進分解すると、

$$8 = 2^3 \text{ 、 } 3 = 2^1 + 2^0 \text{ 、 } 10 = 2^3 + 2^1$$

となる。このとき、３つの山（ℓ、m、n）は、ℓ、m、n を二進分解したとき、どの自然数 k についても、2^kが３つの山の中に偶数（０か２）個現れるとき、「二進対称形」であるといい、ある自然数 k について2^kが奇数個現れれば「二進非対称形」であるという。これで二進対称形を含む用語の解説と準備は整った。ここで、もう一度必勝戦略を確認するとこのゲームの必勝戦略は「二進対称形にして相手に手渡すのを続けること。」である。さらに細かく言うと、二進対称形で自分に手が回ってきた場合、相手が最善手を打つ限り自分は負けが決定し、二進非対称形で自分に手が回ってきた場合は、二進対称形にして相手に手渡すことを続ければ、必ず勝つことが出来る。では、今回の（8、3、10）個の三山ニムを例に解説する。３つの山の石は、$8 = 2^3$、$3 = 2^1 + 2^0$、$10 = 2^3 + 2^1$と二進分解することができた。2^0は一個しかないため、（8、3、10）は二進非対称形である。上記の通り、二進非対称形で自分に手が回ってきた場合は、二進対称形にして相手に手渡すことを続ければ必ず勝つことが出来るので、今回は先手必勝になるということが言える。（8、3、10）個の三山ニムは先手必勝ゲームである。では、なぜ二進対称形にして相手に渡し続ければ勝てるのか。それは､「二進対称形に手を加えると必ず二進非対称形になる。」という性質と「二進非対称形にはそれを二進対称形にする手段が必ずある。」という性質があるからである。これにより、自分が二進対称形にして相手に手を回せば、自分には必ず二進非対称形で手が回ってくることになる。以下この動作を続ければ、最終的に自分は（0、0、0）という二進対称形の手を打つことになり、それはすなわち最後の石を取ることと同じであるので、必ず勝つことが出来る。これこそが、三山ニムの必勝戦略である。

8. 平面三目並べ

立体三目並べの必勝戦略について記述する前に、ここでは平面三目並べについて解説する。

8.1 ルール

１．3×3 のマス目に、先攻は〇、後攻は×を１つずつ、交互に書き込んでいく。

２．先に縦、横、斜めのいずれか１列に、先攻は〇、後攻は×を３つ揃えたら勝ち。

8.2 用語

1	2	3
4	5	6
7	8	9

図２

3×3 のマス目に、図２のように 1~9 の番号をつける。1,3,7,9 を角、2,4,6,8 を辺、5 を中央と呼ぶものとする。また、あと一手で縦,横,斜めのいずれか 1 列が揃う状態のことをリーチ、リーチになっている列が 2 列ある状態をダブルリーチと呼ぶ。ダブルリーチを作ることができた場合、次の相手のターンに相手がどのマスに手を打っても、2 列できているリーチの両方を消すことはできないので、自分にリーチがかかっていない状況でダブルリーチを作ることができたプレイヤーは勝者となる。

8.3　分析

平面三目並べは、一般に〇×ゲームとも呼ばれる、多くの人に馴染みのあるゲームである。このゲームも「着手の選択肢が有限である。」「ゲームが有限回の着手で決着する。」という二つの性質を持つため、有限ゲームである。また、ツェルメロの定理より、「先手必勝法があるか、後手必勝法があるか、引き分けに終わるか」のいずれかであるが、実はこの平面三目並べは、先手後手が最善手を打ち続けた場合、必ず引き分けに終わるという事が分かっている。では、どのような手を打つことによって必ず引き分けに終わるのか、先手が一手目を角に置く場合、辺に置く場合、中央に置く場合の 3 パターンに分けて解説する。

A. まず先手が角に一手目を打つ場合、後手は中央に次の手を打たなければ負けることになる。先手が 1 に手を打ったとする。ここで、後手が 5 以外のマスに手を打つと、次の手で先手に 5 を取られることになる。後手が、一手目を 9 以外に打っていた場合、後手はここでリーチを消すために必ず 9 に手を打たなければならない。すると、先手には次のターンにダブルリーチを作る手が必ず存在するので、先手の勝利となる。仮に後手の一手目を 9 に打ったとしても、次に先手の二手目を 7 に打たれると、後手の二手目はリーチを消すために必ず 4 に打つことになる。すると、先手の三手目を 3 に打つとダブルリーチが完成し、先手の勝利となる。以下のことから、先手が角に打った場合、後手の初手は中央に打つことになる。逆に先手が角に手を打ち、後手が中央に手を打った場合、それ以降は先手後手ともにダブルリーチを作ろうとしても、相手にそれをふせぐ手が必ず存在するので、そのまま 9 マスすべてが埋まり引き分けに終わる。

B. 次に、先手が中央に一手目を打つ場合、後手は角に手を打たなければ負けることになる。逆に後手が初手を角に打つと、その後は互いにダブルリーチを作れないので、引き分けに終わる。

C. 最後に先手が辺に一手目を打つ場合を考える。先手が辺の位置である 2 に手を打った場合、後手が一手目を 1,3,5,8 のいずれかに打てば、その後互いにダブルリーチを作ることはできず、引き分けに終わることになる。

このように、先手がどの位置に一手目を打っても、後手が一手目を正しい場所に打ち、その後も先手後手ともに最善手を打ち続ければ、平面三目並べは必ず引き分けに終わる。

9. 立体三目並べ

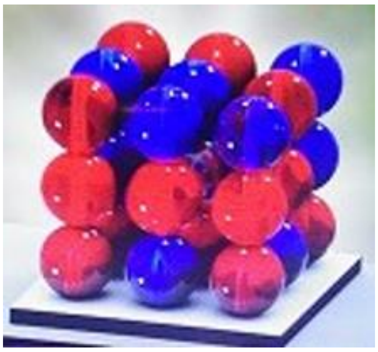

図３

立体三目並べとは、平面三目並べに高さが加わり、3×3×

３のマスで行われる三目並べゲームである。(図３)

9.1　用語

平面三目並べと同様、マスに 1～9 の番号をつけ（図２）、1,3,7,9 を角、2,4,6,8 を辺、5 を中央と呼ぶものとする。また、下段を１段目、中段を２段目、上段を３段目と呼ぶ。

マスの位置は（段数-マスの番号）で表す。例えば、二段目の３は（2-3）と表記する。

9.2　ルール

１．3×3×３のマス目に、先攻は赤、後攻は青の駒を１つずつ、交互に置いていく。

２．駒を置く際は重力がはたらくものとし、駒の上に駒を重ねるように置いていくため、いきなり二段目や三段目に駒を置くようなことは出来ない。

３．先手後手のいずれかが（1-5）の位置に駒を置いたとき、立体の中央のマス、すなわち（2-5）の位置に赤でも青でもない中立の駒が配置される。

４．先に立体中の縦、横、斜めのいずれか１列に自分の駒を３つ揃えたら勝ちとする。

9.3　必勝戦略

この立体三目並べも有限ゲームであり、「先手必勝法があるか、後手必勝法があるか、引き分けに終わるか」のいずれかであるという事がいえる。私は今回、この立体三目並べには先手必勝法があるのではないかと予想し、戦略の研究に取り組んだ。その結果、予想通り先手必勝法が見つかったので、その具体的な戦略をここでは解説していく。

まず始めに先手は一手目を角、今回は（1-9）に打つ。ここで考えなくてはならないのは、平面三目並べならば後手の一手目の選択肢は（1-1）～（1-8）になるが、この立体三目並べでは（1-1）～（1-8）に加え（9-2）という選択肢もでてくる。では、後手が一手目を（9-2）に打つとどうなるか。平面三目並べにおいて、先手に一手目を角に打たれた場合、後手は必ず中央に駒を置かなければならない。しかし、ここで後手が（9-2）に駒を置くということは、平面三目並べに置き換えると後手が一手目をパスしたことと同じであるといえる。当然先手は二手目に（1-5）に駒を置き、早急に先手の勝利で決着がついてしまう。よって、後手は立体三目並べにおいても、平面三目並べのときと同様に（1-5）に一手目を打たなければならない。このとき、ルール通り（2-5）には中立の駒が置かれる。次に、先手は二手目を（1-7）に打つ。すると先手のリーチができるので、後手は必ず（1-8）に手を打つ。今度は逆に後手のリーチができるので、先手は必ず（1-2）に駒を置く。さて、ここまでで先手は三手、後手は二手を打ったことになる。この後手が打った二手はいずれも選択の余地がないため、先手はここまで確実に誘導することができる。現在の駒の状態は図４の通りである。

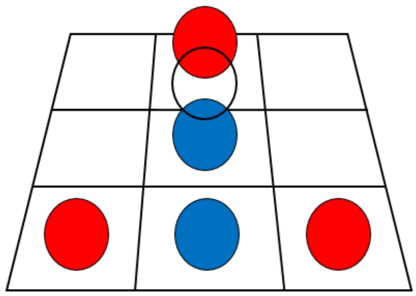

図４

次に打たれる手は後手の三手目であり、後手がどこに手を打ってくるのかで状況が変わるので、ここから先は場合分けをして考えていく。ただし、図４を見ても分かる通り立体の駒は左右対称になっている。このことから、次に後手が駒を置くことが出来るマスのうち、(1-1) と (1-3)、(1-4) と (1-6)、（2-7）と（2-9）は同じであると考える。よって、後手の三手目を（1-1），(1-4)，(2-2)，(2-7)，(2-8)，(3-5) のどこに打つかという６パターンに分けて、先手の次の手を考える。

A. まず、後手が（1-1）に打った場合を考える。このとき、先手は（2-7）に打てばよい。すると先手のリーチができるので、後手は必ず（3-7）に打たなければならない。次に先手の五手目を（2-8）に打つ。するとまた先手のリーチができあがる。このとき、後手は（2-9）に置かなければリーチを防げずに負けることになるが、仮に（2-9）に打ったとしても、(1-7)（2-8）の斜めに先手の新しいリーチができ、先手は（3-9）に打てば勝ちとなる。このときの駒の状態は図５の通りである。

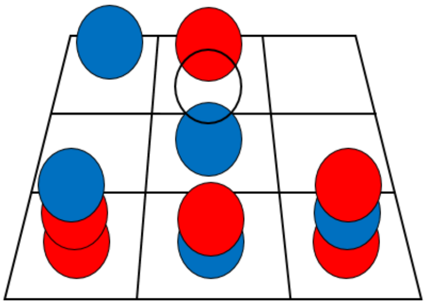

図５

よって、後手が（1-1）に打った場合その後は、先手（2-7）後手（3-7）先手（2-8）後手（2-9）先手（3-9）という手順で、先手は必ず勝つことができる。この手順、先手（2-7）～先手（3-9）を、以後手順①と呼ぶ。

これで後手の三手目は残り五パターンとなったが、実は後手が三手目を（2-2）または（3-5）に置いた場合、先手は手順①を行えば必ず勝つことができる。よって、残るのは三パターンとなる。

B. 後手が三手目を（1-4）に打った場合を考える。このとき、１段目に後手のリーチができるため、先手は四手目を必ず（1-6）に打たなければならない。しかし、ここで逆に１段目に先手のリーチができるため、後手は必ず（1-3）に打たなければならない。このとき、後手のリーチはできないので、先手は五手目を好きなところに打つができる。よって、あとは手順①を行えば先手は必ず勝つことができる。

C. 残った二パターンのうち、後手の三手目（2-7）の場合を考える。このとき注意しないといけないのが、手順①における先手の初手は（2-7）であるが、今回その位置を後手にとられている。つまり、手順①を行うことができないので、別の手順をとらなくてはいけなくなる。そこでこの場合は、先手の四手目を（1-6）に打つ。１段目に先手のリーチができるので、後手は必ず（1-3）に打たなければならない。次に先手は五手目を（2-9）に打つ。するとまた先手のリーチができるので、後手は必ず（3-9）に打たなくてはならない。ここで、先手が六手目を（2-6）に打つと、先手のダブルリーチができあがる。よって、後手には二つのリーチ両方を消す手はないので、この時点で先手の勝ちとなる。このときの駒の状態は図６の通りである。

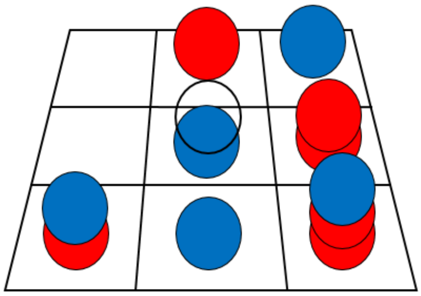

図６

後手が（2-7）に打った後の手順をまとめると、先手（1-6）後手（1-3）先手（2-9）後手（3-9）先手（2-6）となる。この先手（1-6）～後手（2-6）を、以後手順②と呼ぶ。

D. これで残りは後手が三手目を（2-8）に打つ場合のみとなった。しかし、後手が三手目を（2-8）に打つと後手のリーチができ、先手は四手目を必ず（3-8）に打たなければならない。このとき先手のリーチはできないので、後手は四手目を好きな位置に打つことができる。現在の駒の状態は図７の通りである。

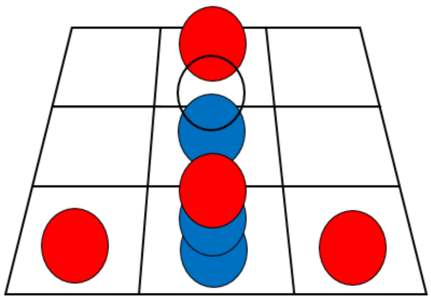

図７

後手に駒をどこに置くかの選択権が回ったため、先手はここでまた後手が四手目をどこに置いてくるのかを場合分けして、次の手を考えなくてはならない。図７を見ても分かる通り、駒の状態はここでも左右対称であるため、後手の四手目における（1-1）と（1-3）、（1-4）と（1-6）、（2-7）と（2-9）は同じ手であると考える。すると、考えられる後手の四手目は（1-1）（1-4）（2-2）（2-7）（3-5）の五パターンである。

D.1 しかし、五パターンあるといっても考えないといけないことはそう多くはない。というのも、後手が四手目を（1-1）（1-4）（2-2）（3-5）のいずれかに打った場合、先手は手順②を行えばそのまま勝つことができる。（1-1）（2-2）（3-5）については、後手はここでリーチを作ることができていないので、先手はそのまま手順②を仕掛けることができる。（1-4）に後手が打った場合も、後手のリーチができるがそこで先手

が防がないといけないマスは（1-6）であり、これは手順②の初手と一致するので、他と同様（1-4）に置かれても手順②を仕掛けて先手は必ず勝つことができる。

D.2　これで、残ったのは後手が四手目を（2-7）に打った場合のみである。このとき、なぜ他の四パターンのようにいかないのか。それは後手のリーチができるからである。先手は必ず（2-9）に打たなければならない。しかし、このとき逆に先手のリーチができるため、後手は必ず（3-9）に置かなければならない。これによって、先手に駒をどこに置くかの選択権が回ってきたので、先手は六手目を（1-6）に置く。後手はリーチを防ぐために必ず（1-3）に置く。ここで、先手は７手目を（2-6）に置けば、先手のダブルリーチが完成し先手の勝ちとなる。このときの駒の状態は図８の通りである。よって、後手の五パターンにおける先手の勝利手順がいえた。

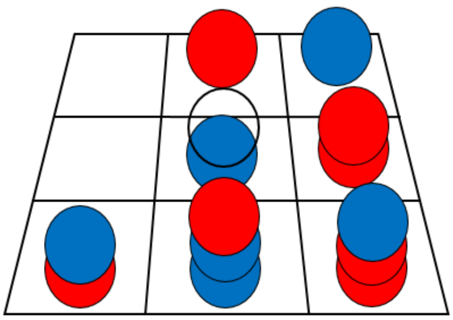

図８

これで、立体三目並べにおける先手の必勝戦略が完成した。

10. 立体三目並べの先手必勝表

別ページ

11.参考文献

半沢英一　『ヘックス入門』ビレッジプレス,2013 年

立体三目並べの先手必勝表

先手１	後手１	先手２	後手２	先手３	後手３	先手４	後手４	先手５	後手５	先手６	後手６	先手７
１－９	１－５	１－７	１－８	１－２	１－１	２－７	３－７	２－８	２－９	３－９		
					２－２	２－７	３－７	２－８	２－９	３－９		
					１－４	１－６	１－３	２－７	３－７	２－８	２－９	３－９
					３－５	２－７	３－７	２－８	２－９	３－９		
					２－７	１－６	１－３	２－９	３－９	２－６		
					２－８	３－８	１－１	１－６	１－３	２－９	３－９	２－６
					２－８	３－８	２－２	１－６	１－３	２－９	３－９	２－６
					２－８	３－８	１－４	１－６	１－３	２－９	３－９	２－６
					２－８	３－８	３－５	１－６	１－３	２－９	３－９	２－６
					２－８	３－８	２－７	２－９	３－９	１－６	１－３	２－６

・表中の数字は「段数－マスの数字」で表されている。

・段数は下段を１段目、中段を２段目、上段を３段目と呼ぶ。

・マスの数字は下の通りである。

1	2	3
4	5	6
7	8	9